

SYRTHES 3.4 - Manuel Théorique

C. Péniguel, I. Rupp

EDF R&D
6 Quai Watier
78401 CHATOU - FRANCE

support-syrthes@edf.fr

2008

Table des matières

1 Introduction

I Conduction

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2 | Equations de la thermique | 5 |
| 2.1 | Equation différentielle de la température dans un solide immobile | 5 |
| 2.2 | Notion de flux | 7 |
| 2.3 | Relation entre flux et température | 9 |
| 2.3.1 | Cas d'un solide isotrope | 9 |
| 2.3.2 | Cas d'un solide non isotrope | 10 |
| 2.4 | Conditions sur la frontière du domaine espace-temps | 11 |
| 2.4.1 | Conditions initiales | 11 |
| 2.4.2 | Conditions aux limites | 12 |
| 2.5 | Système final régissant la température dans le solide | 13 |
| 2.5.1 | Formulation générale | 13 |
| 2.5.2 | Ecriture dans divers systèmes de coordonnées | 14 |
| 3 | Modélisation, formulation variationnelle | 17 |
| 3.1 | Discrétisation temporelle | 17 |
| 3.1.1 | Formulation variationnelle | 18 |
| 3.1.2 | Discrétisation spatiale | 19 |
| 4 | Méthodes numériques | 21 |
| 4.1 | Eléments finis utilisés | 21 |
| 4.1.1 | Elément triangulaire iso-P2 | 21 |
| 4.1.2 | Elément tétraédrique iso-P2 | 23 |
| 4.2 | Calcul des matrices élémentaires | 25 |
| 4.2.1 | Matrices de masses | 27 |
| 4.2.2 | Matrices de diffusion | 28 |
| 4.2.3 | Matrices de bord | 30 |
| 4.2.4 | Algorithme de résolution | 33 |
| 4.2.5 | Solveur utilisé | 34 |
| 4.2.6 | Mise en œuvre d'une méthode non-assemblée | 34 |

II Rayonnement

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Introduction | 39 |
| 6 | Le rayonnement thermique | 41 |
| 6.1 | Les transferts radiatifs | 41 |
| 6.2 | Définitions fondamentales | 42 |
| 6.2.1 | Emittance et luminance | 42 |
| 6.2.2 | Loi de Lambert | 42 |
| 6.3 | Les lois du rayonnement thermique | 43 |
| 6.3.1 | Le corps noir | 43 |
| 6.3.2 | Loi de Planck | 43 |
| 6.3.3 | Loi de Stephan-Boltzmann | 44 |
| 6.3.4 | Emission des corps réels | 45 |
| 6.3.5 | Absorption, réflexion et transmission | 45 |
| 6.3.6 | Loi de Kirchhoff | 46 |
| 6.4 | Les approximations utilisées dans SYRTHES | 46 |
| 6.4.1 | Première approximation | 46 |
| 6.4.2 | Deuxième approximation | 46 |
| 6.4.3 | Troisième approximation | 47 |
| 6.5 | Echange radiatif entre 2 surfaces | 49 |
| 6.5.1 | Flux monochromatique directionnel | 49 |
| 6.5.2 | Cas de l'émission diffuse | 49 |
| 6.5.3 | Propriétés des facteurs de forme | 50 |
| 7 | Traitement numérique du rayonnement | 51 |
| 7.1 | Calcul des facteurs de forme | 51 |
| 7.1.1 | Méthode de Monte-Carlo (ray tracing) | 51 |
| 7.1.2 | Intégration numérique des intégrales | 52 |
| 7.1.3 | La sphère de Nusselt | 52 |
| 7.1.4 | L'hémicube de Cohen | 53 |
| 7.1.5 | La méthode des intégrales de contour | 54 |
| 7.2 | Le traitement des surfaces cachées | 55 |
| 7.3 | Les géométries axisymétriques | 55 |
| 7.4 | Les symétries et la périodicité | 57 |
| 7.5 | Le système de rayonnement | 58 |
| 7.5.1 | Cas des corps gris | 58 |
| 7.5.2 | Cas des corps gris par bande | 58 |
| 7.6 | Le couplage avec la conduction | 59 |
| 7.6.1 | Les maillages | 59 |
| 7.6.2 | Algorithme pour le couplage de la conduction et du rayonnement | 60 |
| 7.7 | Le couplage fluide/conduction solide/rayonnement | 61 |
| 8 | Conclusion | 63 |
| A | Symboles | 65 |

Dans de nombreux processus industriels, un couplage thermique important existe entre domaine fluide et domaine solide. C'est le cas dans nombre d'applications intéressant EDF, par exemple lors des phases de conception de processus industriels, ou du point de vue de la sûreté.

L'intérêt d'accéder à la connaissance des phénomènes thermiques au sein d'un système global, fluide-solide réside principalement en deux aspects :

- d'une part, la prise en compte des équations de la thermique dans le solide permet de repousser l'application des conditions aux limites de l'autre côté de la paroi (face extérieure), là où elles sont mieux connues; (cette démarche ne peut de toute façon, que réduire, pour le fluide, les conséquences d'imprécisions commises sur ces mêmes conditions aux limites),
- d'autre part, la connaissance de la distribution de température dans le solide peut avoir un intérêt intrinsèque (recherche de points chauds dans le solide, utilisation pour une étude mécanique ultérieure, etc ...)

Un programme a donc été défini pour le développement d'un code permettant la prise en compte de la thermique dans un fluide et dans un solide [1]. L'objet du présent document est de détailler les différentes approches mises en œuvre lors de la réalisation des modules de thermique dans le solide.

Après un rappel général concernant l'établissement de l'équation gouvernant la température, on abordera les différentes modélisations (bidimensionnelle cartésienne et axisymétrique, tridimensionnelle) qui ont été implantées, en insistant sur leurs avantages et leurs limitations.

Dans la mesure où le module de résolution de la thermique dans un solide ne s'appuie sur aucun code préexistant (donc déjà validé), l'étape d'évaluation des performances du code ainsi que de la qualité des résultats a constitué une étape importante du projet et sont présentés dans les notes [2] et [3]. De nombreux cas-tests ont été étudiés par les auteurs.

Première partie

Conduction

Lorsque différentes parties d'un corps sont à des températures différentes, la chaleur se propage des régions "chaudes" vers les régions "froides". Ce transfert se fait essentiellement par trois moyens différents :

- par conduction (la chaleur passe par le solide lui-même),
- par convection (la chaleur est alors transférée par déplacement d'une partie du corps vers d'autres parties de ce même corps),
- par rayonnement (la chaleur est transférée à distance par rayonnement électromagnétique).

Autant convection et rayonnement sont d'importance dans des corps fluides ou gazeux, autant il est légitime de considérer leur influence comme quasi-négligeable dans un solide. Comme on se restreint dans ce document, au seul cas du solide, on ne considèrera dorénavant que les aspects conductifs.

2.1 Equation différentielle de la température dans un solide immobile

Pour établir l'équation de la température, il est usuel de repartir des premiers principes de la thermodynamique, et en l'occurrence du premier principe qui stipule que la variation d'énergie totale d'un volume de contrôle Ω est égale à la somme des travaux des forces de volume et des contraintes appliquées à sa surface, et des variations d'énergie thermique appliquées à ce volume de contrôle, c'est-à-dire :

$$\frac{dE_t}{dt} = \dot{W} + \dot{Q}$$

avec

$$E_t = \int_{\Omega(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) d\Omega$$

$$\dot{W} = \int_{\Omega(t)} \vec{f} \cdot \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma(t)} \bar{\bar{\Sigma}} \cdot \vec{n} \cdot \vec{u} d\Gamma$$

$$\dot{Q} = \int_{\Omega(t)} \Phi d\Omega - \int_{\Gamma(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

Dans la mesure où on se restreint au cas d'un solide immobile, la quantité \vec{u} doit être prise nulle. Si de plus on applique le théorème de Gauss aux équations précédentes, on obtient :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho e}{\partial t} - \Phi + \operatorname{div} \vec{q} \right) d\Omega = 0$$

Cette équation étant vraie pour tout volume Ω , on obtient l'équation locale de conservation :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} - \Phi + \operatorname{div} \vec{q} = 0$$

En pratique, l'enthalpie massique h est souvent introduite : $\rho h = \rho e + p$

On obtient alors

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{q} + \Phi$$

On peut également écrire la relation suivante

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

De façon classique, on introduit la chaleur spécifique à pression constante C_p définie par :

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

Certains auteurs (par exemple [2]), mentionnent l'influence de la pression, dans la génération d'énergie au sein du solide. Ils introduisent l'enthalpie libre, ou bien, plus physiquement, relient ce terme au travail dû à la dilatation d'un solide (cette dilatation étant occasionnée par la variation de température). On peut alors introduire un terme additionnel (changement de température dû à la pression exercée sur le solide) qui est généralement de la forme :

$$\frac{3\alpha T}{J} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Dans cette expression, α représente le coefficient de dilatation linéique, et J la constante d'équivalence travail/chaleur qui vaut $J = 4.184$. Ce terme est généralement négligeable, et dans les applications visées, il est tout à fait justifié de ne pas le faire apparaître.

On arrive donc à l'équation générale suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q} + \Phi$$

On a introduit dans les équations précédentes une grandeur vectorielle \vec{q} , que l'on nomme le flux de chaleur. Le paragraphe suivant s'attarde sur les propriétés de cette grandeur et montre comment elle est reliée à la température.

2.2 Notion de flux

L'objet de ce paragraphe est d'expliciter la notion de flux et de faire quelques rappels généraux sur des propriétés très classiques. Le flux est une grandeur continue (sous quelles hypothèses?), comment est établie la loi de Fourier, est-elle toujours vraie?, etc ...

Définition du flux

Soit S une surface et P un point de cette surface. On pose par définition que le flux de chaleur au point P , à travers la surface S est la quantité de chaleur qui transite à travers cette surface par unité de temps et par unité de surface.

ASSERTION 1 : Le flux est une grandeur continue

Montrons que le flux à un point P , à travers une surface varie continuellement si la direction de la normale au plan reste constante.

Prenons une surface élémentaire dS du plan considéré, entourant P et un cylindre s'appuyant sur dS et ayant pour génératrice une ligne PP' dont la longueur infinitésimale ε est d'ordre beaucoup plus faible que les dimensions de dS .

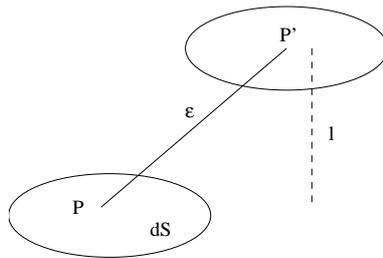


FIG. 2.1 – Cylindre élémentaire

Soient $f_1 dS$ et $f_2 dS$ les quantités de chaleur par unité de temps qui traversent les surfaces planes du cylindre. Si on suppose que la quantité de chaleur passant à travers la surface courbe est négligeable (du fait que $\varepsilon^2 \zeta dS$) la quantité de chaleur totale dans le cylindre est alors $dS (f_1 - f_2)$.

Soit d'autre part T la température moyenne dans le cylindre, l la distance entre les deux faces, ρ et C_p la densité moyenne et la chaleur spécifique du matériau. On peut alors écrire que le taux auquel le cylindre gagne de la chaleur est :

$$\rho C_p dS l \frac{\partial T}{\partial t}$$

En égalant les deux expressions et simplifiant par dS on trouve :

$$f_1 - f_2 = \rho C_p l \frac{\partial T}{\partial t}$$

Lorsqu'on fait tendre $l \rightarrow 0$ alors $f_1 \rightarrow f_2$ ce qui prouve la propriété de continuité du flux. Il est intéressant de noter à partir de l'équation précédente que la continuité des propriétés thermiques du milieu n'est pas requise dans la démonstration, (il suffit seulement que les grandeurs soient bornées) L'application immédiate de cette remarque est que le flux reste continu même à l'interface de deux milieux différents.

ASSERTION 2 : Il suffit de connaître le flux passant à travers 3 plans perpendiculaires intersectant en un point P pour accéder à la connaissance du flux à travers n'importe quel plan passant par ce point.

Considérons un tétraèdre élémentaire PABC, dont les trois plans PBC, PCA et PAB sont parallèles aux plans définis par les axes du système de référence.

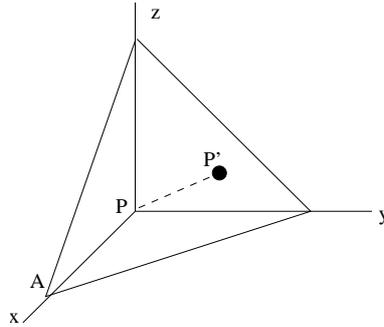


FIG. 2.2 – Tétraèdre élémentaire

Soit P' le point obtenu par projection orthogonale de P sur le plan ABC. On pose alors :

- d la norme du vecteur $\overrightarrow{PP'}$,
- (λ, μ, ν) les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{PP'}$,
- S_{ABC} la surface du triangle ABC.
- q_x, q_y, q_z et q les flux de chaleur par unité de temps à travers les surfaces élémentaires PBC, PCA, PAB et ABC .

La quantité de chaleur gagnée par le tétraèdre élémentaire est alors $(\lambda q_x + \mu q_y + \nu q_z - q) S_{ABC}$

Si on pose de plus ρ et C_p densité et chaleur spécifique à pression constante du solide, T la température moyenne du tétraèdre, on sait que la variation d'énergie est alors :

$$\int_{\text{tétraèdre}} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \frac{1}{3} S_{ABC} d \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

En égalant ces deux quantités, on obtient :

$$\lambda q_x + \mu q_y + \nu q_z - q = \frac{1}{3} d \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

faisons alors tendre d vers 0, on obtient alors

$$\lambda q_x + \mu q_y + \nu q_z = q$$

On a donc l'expression du flux, en un point P, à travers une surface quelconque en fonction des flux à travers les trois plans élémentaires.

On peut aussi introduire la notion de vecteur flux \vec{q} tel que :

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} \quad \text{et ayant pour cosinus directeurs} \quad \frac{q_x}{\|\vec{q}\|}, \frac{q_y}{\|\vec{q}\|}, \frac{q_z}{\|\vec{q}\|}$$

2.3 Relation entre flux et température

On cherche maintenant à relier la grandeur flux \vec{q} , introduite précédemment, à la température T à un instant donné. On distingue le cas d'un solide à comportement isotrope et non isotrope.

Définition d'une surface isotherme

Une surface isotherme est une surface telle qu'à un instant t , chaque point de cette surface est à la même température.

2.3.1 Cas d'un solide isotrope

On pose, (il faut insister sur le fait que cela ne dérive pas d'une démonstration), que le flux de chaleur qui se transmet de l'intérieur vers l'extérieur d'une surface isotherme par unité de surface et par unité de temps, en un point, est égal à :

$$\vec{q} = -k_s \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}$$

où k_s désigne la conductivité thermique du milieu et $\frac{\partial}{\partial n}$ l'opérateur différentiation selon la normale à la surface en prenant la normale orientée vers l'extérieur.

ASSERTION 3 : (LOI DE FOURIER)

Dans un solide isotrope, la relation entre le vecteur flux \vec{q} et la température T s'exprime par :

$$\vec{q} = -k_s \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Pour démontrer cette égalité, on détermine le flux en un point P, à travers une surface quelconque (non nécessairement isotherme). Prenons le cas particulier où le plan tangent à l'isotherme passant par P est égal à OXY. Dans ce cas, les flux élémentaires au travers des plans élémentaires sont :

$$q_x = 0 \quad q_y = 0 \quad q_z = -k_s \frac{\partial T}{\partial z}$$

Si la normale à P de la surface considérée a pour cosinus directeur (λ, μ, ν) , le flux à travers cette surface est alors

$$-k_s \nu \frac{\partial T}{\partial z} = -k_s \frac{\partial T}{\partial n}$$

Par conséquent, le flux de chaleur en un point donné, à travers une surface quelconque, est $-k_s \frac{\partial T}{\partial n}$ où $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne l'opérateur différentiation dans la direction de la normale au plan

orientée vers l'extérieur. En particulier, les flux au travers des trois plans parallèles aux axes du repère sont :

$$q_x = -k_s \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k_s \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k_s \frac{\partial T}{\partial z}$$

Donc sous forme vectorielle

$$\vec{q} = -k_s \overrightarrow{\text{grad } T}$$

Remarque :

Ce résultat, démontré ici dans le cadre cartésien, reste vrai en coordonnées cylindriques ou sphériques.

2.3.2 Cas d'un solide non isotrope

Les matériaux à caractère non isotrope apparaissent parfois dans la nature ou dans les applications industrielles. Il faut alors généraliser la règle introduite au paragraphe 2.3.1 puisque la direction du flux en un point n'est plus nécessairement normale à la surface isotherme. Il est usuel d'étendre cette notion en disant que chaque composante du vecteur flux en un point est une combinaison linéaire des composantes du gradient de température en ce point, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -q_x = K_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + K_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \\ -q_y = K_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + K_{23} \frac{\partial T}{\partial z} \\ -q_z = K_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + K_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + K_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

Suivant la structure de la matrice ainsi définie, on classe les matériaux en sous classes. La plus répandue est constituée par les matériaux orthorombiques ou orthotropiques, dont la matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à dire que le solide a une conductivité différente suivant chaque axe.

Remarque 1 :

Bien sûr la même notion peut être introduite en coordonnées cylindropolaires (r, θ, z)

$$q_r = -K_{rr} \frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\theta = -K_{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad q_z = -K_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}$$

C'est par exemple le cas du bois d'un arbre où la conductivité perpendiculairement aux anneaux est différente de celle tangente aux anneaux ou encore de celle suivant l'axe du tronc.

La complexité accrue que provoque la prise en compte d'un tel comportement (somme toute assez rare dans le type d'application que l'on se propose de traiter dans un premier temps) fait que l'on se restreindra désormais à des cas isotropes (mais non nécessairement homogènes).

Cela revient à dire que la matrice de conductivité se réduit à l'identité, multipliée par un scalaire, variable notamment en espace et en temps.

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} = k_s(x, y, z, t, \dots) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La notation k_s pour la conductivité, sera désormais utilisée dans la suite de ce document, ce qui suppose implicitement qu'on se place dans le cadre d'un solide à comportement isotrope. On remarquera que la "fonction" k_s peut être très complexe, et par exemple dépendre de la température locale, ou d'autres caractéristiques locales.

2.4 Conditions sur la frontière du domaine espace-temps

Avant de pouvoir prétendre aborder les questions d'ordre numérique, il reste à préciser les conditions initiales et conditions aux limites que la température doit satisfaire. Ces expressions sont issues partiellement de l'expérience et de déductions mathématiques.

On considère que la température à l'intérieur du solide est une fonction continue de l'espace, (x, y, z) désignant un système de coordonnées quelconque, et du temps t . De plus, il est supposé que la température $T(x, y, z, t)$ est une fonction différentiable à l'ordre 1 vis à vis de t et à l'ordre 2 vis à vis de (x, y, z) . Il faut noter qu'à la frontière (aussi bien temporelle que spatiale), ces hypothèses ne sont pas nécessaires.

2.4.1 Conditions initiales

On suppose donnée à un instant t (que l'on prend comme origine) la température au sein du solide. Si cette distribution est continue, il faut que la limite quand $t \rightarrow 0$ de la solution de l'équation différentielle soit égale à la distribution initiale. Soit $\Theta_o(x, y, z)$ la distribution de température à $t = 0$. Si on appelle $T(x, y, z, t)$ la solution de l'équation différentielle régissant la température, il faut que

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x, y, z, t) = \Theta_o(x, y, z) \quad \forall (x, y, z)$$

Si la solution initiale est **discontinue** en certains points ou surfaces, en fait une distribution continue apparaît presque immédiatement due à la nature régularisante de l'opérateur de diffusion. C'est en fait vers cette solution **continue** que doit converger la solution quand $t \rightarrow 0$.

2.4.2 Conditions aux limites

Dans ce paragraphe, on passe en revue les différentes conditions aux limites apparaissant généralement dans la théorie de la conduction.

Température imposée

On considère que la température, sur une partie de la frontière du domaine est constante ou bien fonction du temps ou de l'espace ou des deux. C'est la plus facile des conditions à introduire, même s'il apparaît que d'un point de vue expérimental, prescrire la température d'une surface constitue un exercice "très" difficile.

Flux imposé

On a sur une partie de la frontière du domaine un flux imposé. Si on note q ce flux, on peut alors écrire :

$$q = -k_s \frac{\partial T}{\partial n}$$

Lorsque le flux imposé est nul, on parle de surface adiabatique, c'est le cas d'une surface parfaitement calorifugée.

Les flux sont traités de façon explicite.

Transfert de chaleur linéaire à travers une surface

Il peut arriver que le flux soit proportionnel à la différence de température entre la surface et le milieu dans lequel baigne le solide (notée T_o), c'est-à-dire $\lambda(T - T_o)$ où λ est une constante positive parfois appelée conductance thermique, (on introduit parfois l'inverse de cette grandeur $R = 1/\lambda$ résistance thermique par unité de surface). La condition limite devient alors :

$$-k_s \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda(T - T_o)$$

Ce coefficient λ , dans le cas d'un problème où le solide est entouré d'un écoulement forcé, dépend généralement de la vitesse du fluide, de sa nature et des caractéristiques de la surface.

Cette condition est traitée de façon implicite.

Transfert de chaleur non linéaire à travers une surface

Dans la pratique, il arrive fréquemment que le flux de chaleur ne suive pas un comportement linéaire en fonction de la différence de température entre le milieu environnant et le solide considéré. A titre d'exemple, on peut citer :

- **Flux radiatif d'un corps noir**

Si on pose, σ_B la constante de Stefan-Boltzmann, et E l'émissivité de la surface, le flux prend l'expression suivante :

$$q = \sigma_B E (T^4 - T_o^4)$$

- **Convection naturelle**

Quand un solide à température élevée est plongé dans un milieu plus froid, ce fluide a tendance à se mettre en mouvement sous les effets de gravité, c'est le phénomène de convection naturelle. De façon expérimentale, il a été déterminé que le flux de perte de chaleur du solide n'est pas proportionnel à la différence de température ($T - T_o$) mais varie en fonction de la puissance 5/4

$$q = \lambda (T - T_o)^{\frac{5}{4}}$$

Remarque :

Dans la réalité, il est fréquent de trouver ces différents phénomènes simultanément (convection + rayonnement par exemple). Il faudrait alors en toute rigueur imposer une condition à la limite qui englobe les différentes expressions présentées dans ce paragraphe.

2.5 Système final régissant la température dans le solide

Ce paragraphe fait une synthèse des différents éléments abordés dans le chapitre 1 et présente le système résolu numériquement dans le cadre du présent développement. Il donne une formulation générale du système, ainsi qu'une écriture des formes que ce système prend dans différents systèmes de coordonnées.

2.5.1 Formulation générale

Pour un solide isotrope, immobile, l'équation régissant la température $T(x, y, z, t)$ dans un domaine $\Omega \times]0, \tau[$ ayant pour frontière Γ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (k_s \overrightarrow{\text{grad}} T) + \Phi \\ \text{condition initiale } \lim_{t \rightarrow 0} T(x, y, z, t) = \Theta_o(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \\ \text{conditions aux limites sur } \Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_q \\ T(x, y, z, t) = \theta(x, y, z, t) \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma_d \\ -k_s \frac{\partial T}{\partial n} = q(x, y, z, t) \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma_q \end{array} \right.$$

Dans ces expressions, Φ désigne une source (ou puits) volumique dépendant du temps et de l'espace, Θ_o la distribution continue de température dans Ω , Γ_d et Γ_q les frontières où sont appliquées respectivement les conditions de Dirichlet et de flux. $q(x, y, z, t)$ est un flux soit constant, soit prenant une expression (linéaire ou non) fonction de la différence de température entre le solide et le milieu extérieur. k_s est une fonction de l'espace et du temps et \vec{n} la normale à Γ orientée vers l'extérieur du domaine considéré.

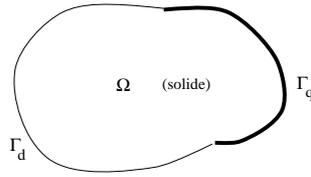


FIG. 2.3 – Domaine considéré

2.5.2 Ecriture dans divers systèmes de coordonnées

2.5.2.a Coordonnées cartésiennes

Nous choisirons pour ces coordonnées une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
L'équation à résoudre sera alors :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_s \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_s \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi$$

Remarque :

Il est clair que la restriction de ce cas à la dimension 2 s'exprime d'une façon simple en supprimant la direction \vec{k} .

2.5.2.b Coordonnées cylindriques

On notera les vecteurs de la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

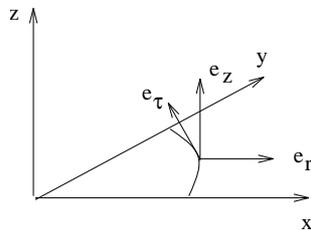


FIG. 2.4 – Coordonnées cylindriques

Rappelons tout d'abord l'expression des opérateurs gradient et divergence dans ce système de coordonnées :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \\ \text{div } v &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Il est alors possible d'établir l'équation de la température :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k_s \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{k_s}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_s \frac{\partial T}{\partial z}) + \Phi$$

2.5.2.c Cas des problèmes axisymétriques

Les équations, qui sont utilisées dans le cas de problèmes axisymétriques, supposent les phénomènes indépendants de la direction θ . Il est donc possible d'opérer une simplification de l'équation à résoudre, et par là même de se ramener à un problème bidimensionnel. Si on prend pour axe de symétrie la direction z , les vecteurs unitaires de l'espace bidimensionnel sont : \vec{e}_r et \vec{k} .

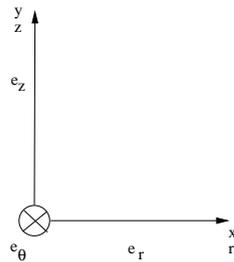


FIG. 2.5 – Coordonnées pour cas axisymétrique

Dans ce repère, l'équation s'écrit :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k_s \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (k_s \frac{\partial T}{\partial z}) + \Phi$$

Modélisation, formulation variationnelle

3

Dans la plupart des cas, une approche analytique n'est pas envisageable, et des techniques numériques doivent être mises en œuvre.

Ce chapitre a pour but de rappeler comment est effectué le passage du problème continu à un problème discret sur lequel des techniques numériques pourront être appliquées.

3.1 Discrétisation temporelle

Rappelons tout d'abord l'énoncé du problème à résoudre.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^3 de frontière Γ et (Γ_d, Γ_q) une partition de Γ . Soient Φ , T_d et q respectivement donnés sur Ω , Γ_d et Γ_q (Φ correspondant à un flux volumique imposé, T_d à une température imposée et q à un flux surfacique imposé). Le problème se pose alors de la façon suivante :

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant données } \Phi, T_d \text{ et } q \\ \text{Trouver } T \text{ définie dans } \Omega]0, \tau[\text{ telle que} \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k_s \overrightarrow{\text{grad}} T) + \Phi \quad \text{dans } \Omega \times]0, \tau[\\ T = T_d \quad \text{sur } \Gamma_d \\ k_s \frac{\partial T}{\partial n} = q \quad \text{sur } \Gamma_q \\ + \text{les conditions initiales} \end{array} \right.$$

Le domaine d'intégration en temps $]0, \tau[$ est discrétisé en intervalles de longueur δt qui constituent les pas de temps. Le $n^{\text{ième}}$ pas de temps correspond alors à une intégration entre t^n et t^{n+1} et permet la détermination du champ T^{n+1} à partir du champ T^n en fonction des conditions initiales et aux limites.

On utilise une discrétisation en temps du type différences finies qui conduit à la résolution du problème suivant :

$$(\mathcal{P}^{n+1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donnés } \Phi, T_d, q \text{ et } T^n \\ \text{Trouver } T^{n+1} \text{ définie dans } \Omega \text{ telle que} \\ \rho C_p \frac{T^{n+1} - T^n}{\delta t} = \text{div}(k_s \overrightarrow{\text{grad}} T^{n+1}) + \Phi^n \quad \text{dans } \Omega \\ T^{n+1} = T_d^n \quad \text{sur } \Gamma_d \\ k_s \frac{\partial T^{n+1}}{\partial n} = q^n \quad \text{sur } \Gamma_q \end{array} \right.$$

Remarque :

L'écriture du problème (\mathcal{P}) sous la forme précédente fait déjà apparaître le caractère implicite du schéma numérique qui sera utilisé.

3.1.1 Formulation variationnelle

Nous allons expliciter la formulation variationnelle (\mathcal{P}^{n+1}) du problème (\mathcal{P}^{n+1}) détaillé dans le paragraphe précédent.

On pourra par ailleurs se reporter aux références [4], [5], pour les détails concernant ce type de formulation.

Multiplions l'équation du problème (\mathcal{P}^{n+1}) par une fonction test v (V étant l'ensemble des fonctions test tel que $v|_{\Gamma_d} = 0$), et intégrons la sur le domaine Ω :

$$\forall v \in V \quad \int_{\Omega} \frac{\rho C_p}{\delta t} (T^{n+1} - T^n) v \, d\Omega = \int_{\Omega} \text{div}(k_s \overrightarrow{\text{grad}} T^{n+1}) v \, d\Omega + \int_{\Omega} \Phi^n v \, d\Omega$$

Puis en utilisant la formule de Green [6], et en faisant intervenir les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \forall v \in V \quad \int_{\Omega} \frac{\rho C_p}{\delta t} (T^{n+1} - T^n) v \, d\Omega = \\ - \int_{\Omega} k_s \overrightarrow{\text{grad}} T^{n+1} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} q^n v \, d\Gamma_q + \int_{\Omega} \Phi^n v \, d\Omega \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu la formulation variationnelle du problème à résoudre :

$$(\mathcal{P}^{n+1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant données } \Phi, T_d, q \text{ et } T^n \\ \text{Trouver } T^{n+1} \text{ définie dans } \Omega \text{ telle que} \\ T = T_d \text{ sur } \Gamma_d \text{ et} \\ \forall v \in V, \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\rho C_p}{\delta t} T^{n+1} v + k_s \overrightarrow{\text{grad}} T^{n+1} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v \right) d\Omega = \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\rho C_p}{\delta t} T^n v + \Phi^n v \right) d\Omega + \int_{\Gamma_q} q^n v \, d\Gamma_q \end{array} \right.$$

Il est alors possible de poser les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a(T^{n+1}, v) &= \int_{\Omega} \frac{\rho C_p}{\delta t} T^{n+1} v \, d\Omega + \int_{\Omega} k_s \overrightarrow{\text{grad}} T^n \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v \, d\Omega \\ L(v) &= \int_{\Omega} \frac{\rho C_p}{\delta t} T^n v \, d\Omega + \int_{\Omega} \Phi^n v \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} q^n v \, d\Gamma_q \end{aligned}$$

Et d'écrire le problème sous forme condensée :

$$(\mathcal{P}^{m+1}) \quad \begin{cases} \text{Etant données } \Phi, T_d, q \text{ et } T^n \\ \text{Trouver } T^{n+1} \text{ définie dans } \Omega \text{ telle que} \\ T = T_d \text{ sur } \Gamma_d \text{ et} \\ \forall v \in V \quad a(T^{n+1}, v) = L(v) \end{cases}$$

3.1.2 Discrétisation spatiale

Du fait que le problème doit être résolu numériquement, on est amené à discrétiser également le problème spatialement.

On peut montrer que le problème \mathcal{P}^{m+1} peut être remplacé par un problème approché où le nombre d'inconnues est fini.

On considère $V_h \subset V$ un sous-espace de dimension finie. On obtient alors le problème "discrétisé" :

$$(\mathcal{P}''_h) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ \forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \end{cases}$$

Remarque :

Sous les hypothèses de théorème de Lax-Milgram¹, le problème (\mathcal{P}''_h) admet une solution unique. En toute rigueur il s'applique au problème continu, et indique que la solution continue obtenue est unique

Supposons que la dimension de V_h soit n , et soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de V_h .

Le problème (\mathcal{P}''_h) peut alors s'écrire

$$(\mathcal{P}''_h) \quad \begin{cases} u_h = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j \\ \sum_{j=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = L(\varphi_i) \quad \forall i \in [1, n] \end{cases}$$

On se trouve ainsi ramené à la résolution d'un système linéaire $AU = F$

où :

$$\begin{cases} A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) \\ U_j = u_j \\ F_i = L(\varphi_i) \end{cases}$$

¹La démonstration de ce théorème est complexe, on pourra ce rapporter à la référence [7]

Il est intéressant de rappeler les propriétés de la matrice A qui découlent du théorème de Lax-Milgram discret : en particulier la coercivité de $a(.,.)$ qui entraîne que A est définie positive et symétrique.

Remarque :

Choix de la base φ_i

- les φ_i sont des fonctions “simples” pour que le calcul des $a(\varphi_i, \varphi_j)$ et $L(\varphi_i)$ soit aisé
- le support des fonctions doit être le plus restreint possible pour que $a(\varphi_i, \varphi_j)$ soit nul le plus souvent possible

Dans le présent cas, la résolution du système amène à estimer des termes du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{ijk} = \int_{\Omega} (\varphi_k \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_i \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_j) d\Omega \\ m_{ij} = \int_{\Omega} (\varphi_i \varphi_j) d\Omega \\ m_{ijk} = \int_{\Omega} (\varphi_k \varphi_i \varphi_j) d\Omega \\ s_j = \int_{\Omega} (\varphi_j) d\Omega \end{array} \right.$$

et sur la frontière Γ_q , des termes du type

$$c_j = \int_{\Gamma_q} (\phi_k) d\Gamma_q$$

Les chapitres précédents ont conduit aux différentes formulations des équations qui doivent être résolues. Pour différentes raisons (historiques et liées en particulier au fait de pouvoir approcher des frontières de formes complexes et d'autre part de pouvoir raffiner la discrétisation localement là où cela est nécessaire), la formulation éléments finis semblait la plus appropriée¹.

Les éléments retenus, pour la discrétisation spatiale du domaine sont de forme triangulaire en 2D et tétraédrique en 3D, ce type d'éléments permettant le pavage de tout domaine.

Le but de ce paragraphe n'est bien sûr pas de réintroduire la méthode des éléments finis mais de souligner certaines "originalités" de l'approche suivie vis à vis de méthodes plus classiques.

4.1 Éléments finis utilisés

Plusieurs types d'éléments sont envisageables. Pour des raisons liées à la simplicité de mise en œuvre, l'optimisation en temps calcul et en stockage, la stabilité numérique, le manque de temps de développement et la volonté de réduire au minimum la maintenance du code, un seul type d'élément a été retenu. Il s'agit des éléments triangulaires iso-P2 pour les cas bidimensionnels et axisymétriques, et tétraédriques iso-P2 pour le cas tridimensionnel. Ces deux éléments et leurs caractéristiques sont discutés en détail dans la suite de ce paragraphe.

4.1.1 Élément triangulaire iso-P2

Dans le cadre de SYRTHES, on se propose d'utiliser des éléments dits *iso-P2* qui mettent en jeu une interpolation linéaire non pas sur la triangulation initiale Q_h mais sur une triangulation plus fine $Q_{h/2}$. Chaque élément se trouve ainsi redécoupé : le triangle est divisé en 4 sous-triangles.

Dans ce triangle il est possible de distinguer deux types de fonctions de base : les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ attachées aux nœuds sommets et les fonctions $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ attachées aux trois nœuds milieux.

Les propriétés de ces fonctions sont par construction de se restreindre à varier linéairement sur les triangles auquel le nœud considéré appartient et d'être nulles sur les autres éléments.

¹au moins au démarrage du projet, cela serait peut-être moins vrai aujourd'hui.

Le choix de cet élément particulier, plutôt qu'une variation linéaire se justifie par le fait que l'on souhaitait, à une époque, pouvoir utiliser le maillage directement dans les codes de mécanique. Le retour d'expérience a montré que l'on pourrait à priori implémenter des éléments linéaires².

4.1.1.a Triangle de référence

La figure ci-dessous présente le triangle de référence redécoupé en 4 sous-éléments, la numérotation locale des 4 sous-triangles (numéros entre parenthèses) et la numérotation locale des 6 nœuds (entre crochets).

On pourra remarquer que, pour simplifier l'écriture des polynômes de base, ce triangle ne s'inscrit pas dans le carré $[0,1]$ mais dans le carré $[0,2]$.

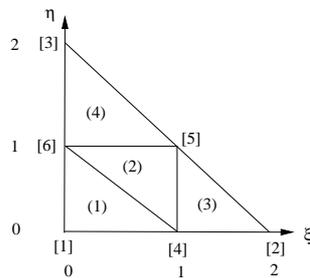


FIG. 4.1 – Triangle de référence

Les polynômes de base associés à cet éléments sont :

Triangle (1)

$$\xi \in [0, 1] , \eta \in [0, 1 - \xi]$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \xi - \eta \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= \xi \\ \varphi_5 &= 0 \\ \varphi_6 &= \eta \end{aligned}$$

Triangle (2)

$$\xi \in [0, 1] , \eta \in [1 - \xi, 1]$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= -1 + \xi + \eta \\ \varphi_5 &= 1 - \eta \\ \varphi_6 &= 1 - \xi \end{aligned}$$

²Cela pourrait être envisagé dans l'avenir

Triangle (3)

$$\xi \in [1, 2], \eta \in [0, 2 - \xi]$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= \xi - 1 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= 2 - \xi - \eta \\ \varphi_5 &= \eta \\ \varphi_6 &= 0\end{aligned}$$

Triangle (4)

$$\xi \in [0, 1], \eta \in [1, 2 - \xi]$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= \eta - 1 \\ \varphi_4 &= 0 \\ \varphi_5 &= \xi \\ \varphi_6 &= 2 - \xi - \eta\end{aligned}$$

4.1.2 Élément tétraédrique iso-P2

Dans le cas tridimensionnel, on utilise des tétraèdres comme éléments finis.

Tout comme en dimension 2, on choisit un type d'élément dit *iso - P2* : ici, il possède 10 nœuds et les fonctions de base associées à chacun d'eux sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

Le tétraèdre est décomposé en huit sous-tétraèdres (4 comportant un nœud de coin, les autres étant situés au milieu). Les fonctions de bases sont de type P1 (variation linéaire sur chaque sous-tétraèdre) ou bien nulles.

4.1.2.a Tétraèdre de référence

La figure ci-dessous présente l'élément de référence ainsi que la numérotation locale de ses nœuds.

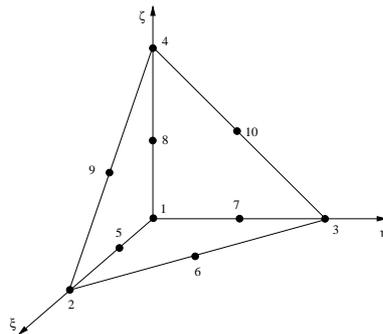


FIG. 4.2 – Numérotation locale des nœuds du tétraèdre

Ce tétraèdre élémentaire est ensuite redécoupé en 8 sous-tétraèdres qui sont présentés ci-dessous.

Polynômes de base

Les polynômes de base s'expriment de la façon suivante :

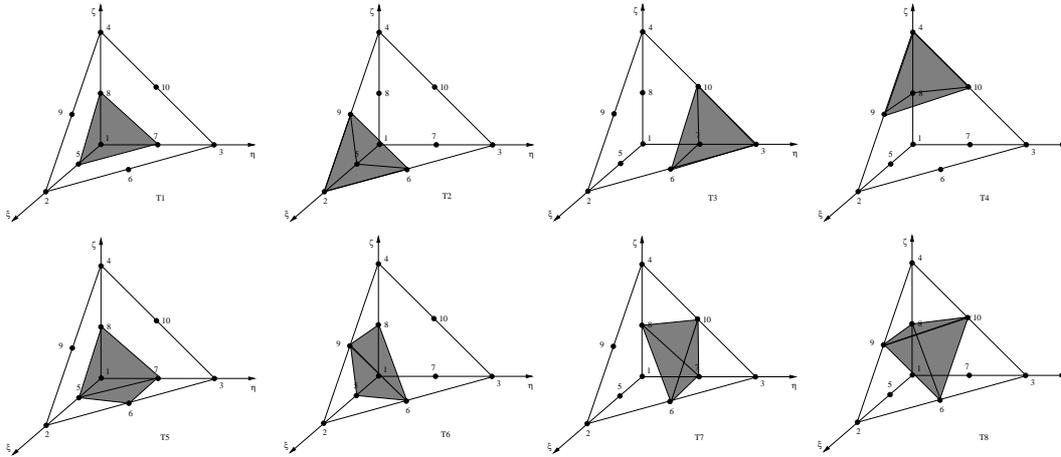


FIG. 4.3 – Les 8 sous-tétraèdres élémentaires

Tétraèdre (1)

$$\begin{aligned} \xi &\in [0, 1], \quad \eta \in [0, 1 - \xi] \\ \zeta &\in [0, 1 - \xi - \eta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \xi - \eta - \zeta \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= 0 \\ \varphi_5 &= \xi \\ \varphi_6 &= 0 \\ \varphi_7 &= \eta \\ \varphi_8 &= \zeta \\ \varphi_9 &= 0 \\ \varphi_{10} &= 0 \end{aligned}$$

Tétraèdre (2)

$$\begin{aligned} \xi &\in [1, 2], \quad \eta \in [0, 2 - \xi] \\ \zeta &\in [0, 2 - \xi - \eta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= \xi - 1 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= 0 \\ \varphi_5 &= 2 - \xi - \eta - \zeta \\ \varphi_6 &= \eta \\ \varphi_7 &= 0 \\ \varphi_8 &= 0 \\ \varphi_9 &= \zeta \\ \varphi_{10} &= 0 \end{aligned}$$

Tétraèdre (3)

$$\begin{aligned} \eta &\in [1, 2], \quad \xi \in [0, 2 - \eta] \\ \zeta &\in [0, 2 - \xi - \eta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= \eta - 1 \\ \varphi_4 &= 0 \\ \varphi_5 &= 0 \\ \varphi_6 &= \xi \\ \varphi_7 &= 2 - \xi - \eta - \zeta \\ \varphi_8 &= 0 \\ \varphi_9 &= 0 \\ \varphi_{10} &= \zeta \end{aligned}$$

Tétraèdre (4)

$$\begin{aligned} \zeta &\in [1, 2], \quad \eta \in [0, 2 - \zeta] \\ \xi &\in [0, 2 - \zeta - \eta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= \zeta - 1 \\ \varphi_5 &= 0 \\ \varphi_6 &= 0 \\ \varphi_7 &= 0 \\ \varphi_8 &= 2 - \xi - \eta - \zeta \\ \varphi_9 &= \xi \\ \varphi_{10} &= \eta \end{aligned}$$

Tétraèdre (5)

$$\begin{aligned} \zeta &\in [0, 1], \quad \xi \in [\zeta, 1] \\ \eta &\in [1 - \xi, 1 - \zeta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= 0 \\ \varphi_5 &= 1 - \eta - \zeta \\ \varphi_6 &= -1 + \xi + \eta + \zeta \\ \varphi_7 &= 1 - \xi - \zeta \\ \varphi_8 &= \zeta \\ \varphi_9 &= 0 \\ \varphi_{10} &= 0 \end{aligned}$$

Tétraèdre (6)

$$\begin{aligned} \xi &\in [0, 1], \quad \zeta \in [1 - \xi, 1] \\ \eta &\in [0, 1 - \zeta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= 0 \\ \varphi_5 &= 1 - \eta - \zeta \\ \varphi_6 &= \eta \\ \varphi_7 &= 0 \\ \varphi_8 &= 1 - \xi \\ \varphi_9 &= -1 + \xi + \zeta \\ \varphi_{10} &= 0 \end{aligned}$$

Tétraèdre (7)

$$\begin{aligned} \eta &\in [0, 1], \quad \zeta \in [1 - \eta, 1] \\ \xi &\in [0, 1 - \zeta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= 0 \\ \varphi_5 &= 0 \\ \varphi_6 &= \xi \\ \varphi_7 &= 1 - \xi - \zeta \\ \varphi_8 &= 1 - \eta \\ \varphi_9 &= 0 \\ \varphi_{10} &= -1 + \eta + \zeta \end{aligned}$$

Tétraèdre (8)

$$\begin{aligned} \zeta &\in [0, 1], \quad \xi \in [0, \zeta] \\ \eta &\in [1 - \zeta, 1 - \xi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_3 &= 0 \\ \varphi_4 &= 0 \\ \varphi_5 &= 0 \\ \varphi_6 &= 1 - \zeta \\ \varphi_7 &= 0 \\ \varphi_8 &= 2 - \xi - \eta - \zeta \\ \varphi_9 &= \xi + \zeta - 1 \\ \varphi_{10} &= \eta + \zeta - 1 \end{aligned}$$

4.2 Calcul des matrices élémentaires

Il a été vu dans les chapitres précédents que l'équation aux dérivées partielles de départ a été remplacée par une formulation discrète, et qu'on pouvait se ramener à la résolution d'un système linéaire où les inconnues (en nombre fini) sont en fait les coefficients des fonctions de base.

Il faut évaluer des termes du type :

$$a_{ij} = \int_{\Omega} (\varphi_k \varphi_i \varphi_j) d\Omega$$

On rappelle que le domaine Ω a été pavé par des éléments (notés Q_n) tels que :

$$\Omega = \sum_{n=1}^{N_{\text{éléments}}} Q_n$$

Chaque fonction φ_i a un support réduit noté $Supp(\varphi_i)$ qui la restreint aux éléments Q_n qui contiennent le nœud considéré (noté N_i). On peut par exemple écrire pour un terme de diffusion

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{grad}\varphi_i \cdot \overrightarrow{grad}\varphi_j \cdot d\Omega = \int_{Supp(\varphi_i) \cap Supp(\varphi_j)} \overrightarrow{grad}\varphi_i \cdot \overrightarrow{grad}\varphi_j \cdot d\omega$$

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{grad}\varphi_i \cdot \overrightarrow{grad}\varphi_j \cdot d\Omega = \sum_{Q \text{ tel que } N_i \text{ et } N_j \in Q} \int_Q \overrightarrow{grad}\varphi_i \cdot \overrightarrow{grad}\varphi_j \cdot dQ$$

Dans l'expression précédente, la notion de matrice élémentaire (sur un seul élément) a été introduite. Il reste encore à préciser la façon dont ces matrices élémentaires sont calculées.

Pour un élément quelconque, il est en général difficile de calculer $\varphi(P)$, c'est-à-dire d'exprimer la valeur de la fonction φ ou de son intégrale, au point P, en fonction des coordonnées de P. Il est usuel d'utiliser un élément de référence (noté \hat{Q}) (décrit dans le paragraphe précédent). Une transformation inversible (notée F) existe entre les éléments réels (notés Q) et l'élément de référence \hat{Q} .

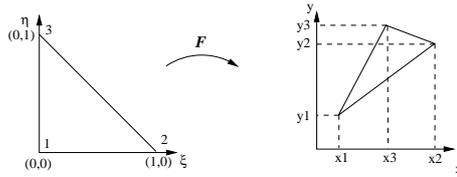


FIG. 4.4 – Transformation affine

Si on note J la matrice jacobienne de la transformation on a pour un cas 2D :

$$dxdy = det(J) d\xi d\eta$$

$$\overrightarrow{grad}_{x,y}(\varphi_i) = J^{-1} \overrightarrow{grad}_{\xi,\eta}(\hat{\varphi}_i)$$

ce qui permet d'effectuer les intégrations dans l'espace de référence où l'expression des fonctions de base est beaucoup plus simple :

$$\int_Q {}^t grad \varphi_i \cdot \overrightarrow{grad} \varphi_j \cdot dQ = \int_{\hat{Q}} {}^t \left(J^{-1} \overrightarrow{grad} \hat{\varphi}_i \right) \cdot \left(J^{-1} grad \hat{\varphi}_j \right) det(J) \cdot d\hat{Q}$$

Les intégrales dans l'espace de référence peuvent être estimées de plusieurs façons : classiquement on utilise une formule de Gauss. Si cette méthode est très générale, elle a cependant le très gros inconvénient d'être coûteuse en calcul et en stockage d'informations lorsqu'il s'agit d'intégrer des polynômes d'ordre 3. Il a donc été décidé pour ce projet de s'appuyer sur l'expérience acquise (voir [8], [9]) concernant les méthodes d'intégration "analytiques" des matrices élémentaires.

En effet pour les éléments retenus (triangles et tétraèdres) l'expression analytique exacte peut s'exprimer très simplement en fonction des coordonnées réelles de l'élément.

4.2.1 Matrices de masses

On peut montrer en utilisant des logiciels d'intégration analytique du type MAPLE [10], ou en faisant appel à des notions purement géométriques [11], que les matrices de masse pour les éléments considérés, ne dépendent que de la surface, pour le triangle, et du volume pour le tétraèdre.

On aura par exemple pour la matrice de masse élémentaire dans un cas cartésien bidimensionnel, si S désigne la surface du triangle Q considéré :

$$\int_Q \varphi_i \varphi_j dS = \frac{S}{48} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 1 & 1 \\ & & & 6 & 2 & 2 \\ & & & & 6 & 2 \\ & & & & & 6 \end{pmatrix}$$

On aura pour la matrice de masse élémentaire du tétraèdre Q , si V désigne le volume du tétraèdre :

$$\int_Q \varphi_i \varphi_j dV = \frac{V}{48} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 8 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ & & & & & 12 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ & & & & & & 8 & 3 & 0 & 2 \\ & & & & & & & 12 & 3 & 3 \\ & & & & & & & & 8 & 2 \\ & & & & & & & & & 8 \end{pmatrix}$$

Dans le cas présent, d'autres types de matrices de masse sont calculées, mais ne sont pas reprises dans ce document pour ne pas alourdir la présentation. Ce sont les matrices qui prennent en compte des termes du type :

$$\int_{\Omega} \frac{\rho C_p}{\delta t} T^{n+1} \theta d\Omega$$

$\frac{\rho C_p}{\delta t}$ étant discrétisé en iso-P2 pour permettre une variation spatiale (ou temporelle) de cette grandeur, Q étant discrétisée en iso-P2, et la fonction test θ de même, on est amené à calculer des matrices élémentaires du type :

$$a_{ij} = \sum_k \left(\frac{\rho C_p}{\delta t} \right)_k \int_{\Omega} \left(\varphi_k \varphi_i \varphi_j \right) d\Omega \quad k = 1, 6 \text{ (en 2D) ou } k = 1, 10 \text{ (en 3D)}$$

A titre d'exemple, l'expression suivante \hat{E} donne les deux premières lignes de la matrice, en posant $c_k = \left(\frac{\rho C_p}{\delta t} \right)_k$

$$\int_Q \sum_{k=1}^6 c_k \varphi_k \varphi_i \varphi_j dS =$$

$$\frac{S}{240} \begin{pmatrix} 6c_1+2c_4+2c_6 & 0 & 0 & 2c_1+2c_4+c_6 & 0 & 2c_1+c_4+2c_6 \\ & 6c_2+2c_4+2c_5 & 0 & 2c_1+2c_4+c_5 & 2c_1+c_4+2c_5 & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

En fait, on n'utilise jamais cette matrice telle quelle dans le développement, car on applique une technique dite de "mass-lumping" qui concentre l'information contenue dans la matrice sur sa diagonale. On obtient alors une matrice du type :

$$\frac{S}{48} \begin{pmatrix} 2c_1 + c_4 + c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2c_2 + c_4 + c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2c_3 + c_5 + c_6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & ml_{44} & 0 & 0 \\ & & & & ml_{55} & 0 \\ & & & & & ml_{66} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} ml_{44} = c_1 + c_2 + 6c_4 + 2(c_5 + c_6) \\ ml_{55} = c_2 + c_3 + 6c_5 + 2(c_4 + c_6) \\ ml_{66} = c_1 + c_3 + 6c_6 + 2(c_4 + c_5) \end{cases}$$

L'avantage de cette formulation est qu'elle est très économique du point de vue calcul car l'assemblage ne concerne que les points de la diagonale. De plus, une fois assemblée cette matrice est restreinte à un vecteur dimensionné au nombre de points du maillage. Des études montrent également que cette technique de "mass-lumping" favorise la stabilité du calcul lors de la résolution. Cet avantage doit être pondéré par le fait que cette approche introduit une diffusion numérique (les cas tests effectués lors de la validation de cette version, montrent cependant que ce choix ne détériore que peu les résultats numériques).

Des résultats similaires peuvent être exposés pour les cas axisymétriques et tridimensionnels. On trouvera dans la référence [11] une liste de matrices élémentaires pour différents types d'éléments.

4.2.2 Matrices de diffusion

De manière identique on peut, soit par calcul formel (à l'aide de logiciels tels que Maple [10]) soit en utilisant des considérations géométriques [11], exprimer simplement les matrices de diffusion qui apparaissent dans le présent problème. Il s'avère cependant que dans

tous les cas examinés par les auteurs les formules obtenues par la méthode géométrique présentent une factorisation (donc un coût de calcul) optimale, c'est pourquoi ce sont elles qui ont été programmées dans le cadre de ce développement.

De façon à laisser le coefficient de diffusion k_s libre d'évoluer en temps et en espace, il est discrétisé spatialement en iso-P2. Ce choix, s'il est quelque peu pénalisant d'un point de vue coût lorsque la conductivité est considérée constante sur tout le domaine, a été retenu pour des raisons de généralité. Le même sous-programme peut alors être utilisé dans tous les cas. Les tests de validation effectués montrent que le temps dépensé pour le calcul des matrices élémentaires à chaque pas de temps reste quasi négligeable dans la plupart des cas et conforte cette position. On a donc à calculer une matrice du type suivant sur l'élément Q :

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{(6 \text{ ou } 10)} \int_Q k_{sl} \varphi_l \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j d\Omega$$

(6 pour les triangles, 10 pour les tétraèdres)

Compte tenu de la variation des fonctions de forme sur les sous-éléments, les gradients $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ sont constant sur chacun d'eux et on peut, par exemple en dimension 2, écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} k_s \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j d\Omega_e = & k_s \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j |_I \int_{\Omega_e|_I} d\Omega_e|_I \\ & + k_s \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j |_{II} \int_{\Omega_e|_{II}} d\Omega_e|_{II} \\ & + k_s \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j |_{III} \int_{\Omega_e|_{III}} d\Omega_e|_{III} \\ & + k_s \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j |_{IV} \int_{\Omega_e|_{IV}} d\Omega_e|_{IV} \end{aligned}$$

Cas des milieux anisotropes

Même si les expressions deviennent plus complexes, c'est suivant le même principe que l'on peut exprimer les termes de la matrice de diffusion. A titre d'exemple, nous nous plaçons en dimension 2, dans le cas d'une diffusion orthotrope. La matrice de conductivité est alors diagonale et comprend 2 termes notés k_{xx} et k_{yy} . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} k_s \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j d\Omega_e = & k_{xx} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} |_I \int_{\Omega_e|_I} d\Omega_e|_I \\ & + k_{xx} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} |_{II} \int_{\Omega_e|_{II}} d\Omega_e|_{II} \\ & + k_{xx} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} |_{III} \int_{\Omega_e|_{III}} d\Omega_e|_{III} \\ & + k_{xx} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} |_{IV} \int_{\Omega_e|_{IV}} d\Omega_e|_{IV} \end{aligned}$$

Il serait fastidieux d'écrire ici les matrices complètes et il est préférable de consulter les documents [11] et [12] qui traitent de ce problème. L'important est de souligner que ces expressions ne dépendent que de la forme du triangle et de sa surface en dimension 2.

Après factorisation, le nombre d'opérations élémentaires à effectuer reste très limité, ce qui induit un coût faible pour le calcul analytique exact de ces matrices.

En dimension 3 la même remarque s'applique, et même si les expressions deviennent plus complexes, elles induisent un coût calcul qui reste très faible. Là encore, les expressions ne dépendent que du volume du tétraèdre et de sa forme, il n'est donc pas besoin de stocker d'autres informations que le volume et les coordonnées des nœuds du maillage, ce qui est indispensable par ailleurs.

4.2.3 Matrices de bord

Il a été vu dans le chapitre précédent que l'équation générale faisait intervenir des termes de bord qui pouvaient être décomposés en deux grandes classes, les conditions aux limites exprimées en flux, et les conditions aux limites de Dirichlet, lorsque la température à un nœud de bord reste constante. Le paragraphe suivant examine brièvement comment sont appréhendés ces deux problèmes.

4.2.3.a Conditions de flux

On est amené à évaluer des termes du type

$$\int_{\Gamma_q} q \, d\Gamma_q = \sum q_i \int_{\Gamma_q} \varphi_i \, d\Gamma_q$$

En dimension 2, la frontière est réduite à une ligne (de dimension 1), et donc les fonction de base utilisées sont de type iso-P2 de dimension 1. En dimension 3, la frontière est une surface, pavée par des triangles de bord. Les fonctions de base utilisées sont donc de type iso-P2 de dimension 2 (mais plongée dans R^3)

4.2.3.b Conditions d'échange

Lorsque la condition à la limite est formulée en tant qu'échange, c'est-à-dire lorsque l'utilisateur connaît la température extérieure et un coefficient d'échange h , elle peut être traitée de façon implicite.

Le flux q s'écrit alors :

$$q = h (T^{n+1} - T_{ext})$$

4.2.3.c Conditions de Dirichlet

L'introduction des conditions aux limites de type Dirichlet dans la matrice peut être réalisée par diverses méthodes. On en citera ici trois :

- les nœuds portant ce type de conditions aux limites ne sont pas des inconnues du problème : ils peuvent être éliminés de la matrice, leur contribution vis-à-vis des points qui les entourent étant reportée au second membre. On obtient ainsi une réduction de la dimension du problème. En contre partie, cette méthode présente l'inconvénient de nécessiter de revoir la matrice puisque la numérotation des nœuds change, et de gérer deux types de numérotation (les nœuds et les équations),

- la seconde méthode consiste à conserver tous les nœuds dans la matrice. Dans un premier temps on reporte au second membre leur contribution vis-à-vis des points voisins, puis on force le second membre correspondant aux Dirichlet à la valeur imposée, enfin la ligne et la colonne correspondant à un nœud de ce type est annulée et un “1” est mis sur la diagonale.
- une troisième méthode faisant appel à la technique du gradient projeté [13] conduit à ne pas changer la matrice. Cette méthode pourra éventuellement être étudiée dans une version ultérieure.

La seconde méthode a été retenue compte tenue de la simplicité de la démarche qu’elle met en œuvre. Par ailleurs il faut noter que le nombre de nœuds portant ce type de condition est souvent restreint par rapport au nombre total de nœuds et que la réduction de la dimension du système qu’induirait la première approche reste alors faible.

Les figures 4.5 et 4.6 présentent la mise en œuvre de l’intégration des conditions de Dirichlet dans la matrice du système. On remarquera que pour des raisons de simplicité de présentation les nœuds Dirichlet sont supposés avoir été numérotés en dernier et apparaissent donc en bloc dans la matrice. En réalité ce n’est généralement pas le cas et ils sont disséminés dans la matrice. Ceci n’apporte d’ailleurs aucune complexité supplémentaire au traitement.

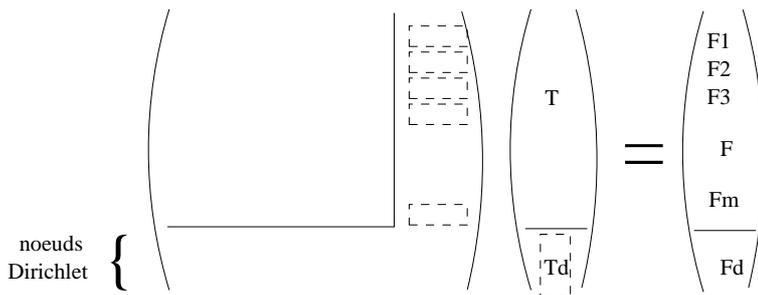


FIG. 4.5 – Première étape : contribution des nœuds Dirichlet

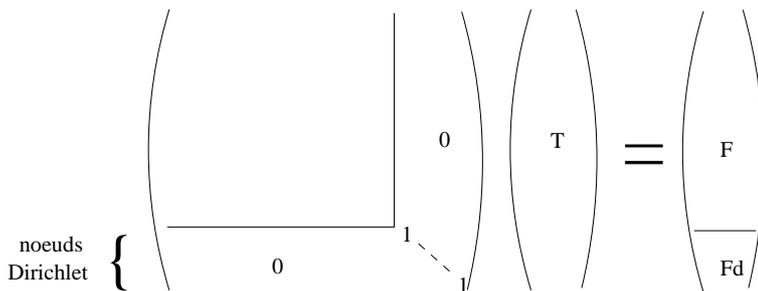


FIG. 4.6 – Seconde étape : modification des coefficients de la matrice

Mise en œuvre pratique, lorsque les nœuds ne sont pas triés

On suppose que l'on résout le système $A x = F$

- Initialiser un vecteur v de longueur NPOINS à 0
- Stocker dans v la valeur imposée aux nœuds Dirichlet
- Effectuer le produit $A v$ (on obtient ainsi la contribution de ces nœuds) et mettre à jour le second membre en calculant $F - A v$
- Modifier le second membre : mettre la valeur imposée sur les nœuds Dirichlet
- Modifier la matrice A : pour chaque nœud Dirichlet n , mettre la ligne et la colonne de A correspondante à 0, mettre 1 sur la diagonale.

4.2.3.d Conditions de symétrie

Au niveau du solide, une condition de type symétrie est équivalente à une condition à la limite de flux nul.

4.2.3.e Conditions de périodicité

Les nœuds des frontières périodiques doivent suivre exactement le même comportement. Plusieurs approches sont envisageables pour le traitement des conditions de périodicité. L'une d'entre elles consisterait à se ramener à une condition de type échange en utilisant un coefficient d'échange "infini" entre les 2 frontières. Dans SYRTHES on a préféré une méthode plus rigoureuse et implicite qui assure qu'à chaque itération du gradient conjugué la condition de périodicité est respectée.

Le principe est explicite sur la figure 4.2.3.e.

Lorsque l'on calcule les contributions pour le nœud 1, on prend en compte celles des éléments a, b et c mais aussi celles des éléments d, e et f . Compte tenu de l'utilisation de matrices non assemblées, cette opération est relativement aisée.

Par ailleurs, cette approche peut facilement être étendue à la prise en compte de périodicités multiples. Dans ce cas, il faudra cependant attacher une attention particulière au traitement des nœuds de coin pour lesquels il est nécessaire de prendre en compte les contributions relatives aux 3 nœuds correspondants en dimension 2 (et 7 en dimension 3).

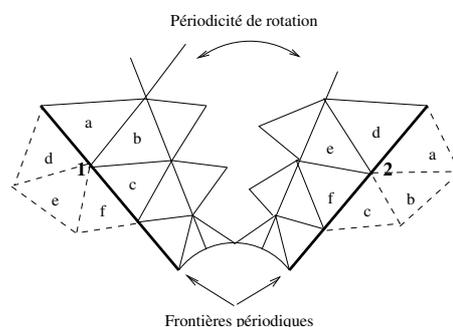


FIG. 4.7 – Prise en compte de la périodicité

4.2.4 Algorithme de résolution

Ce paragraphe tente de synthétiser les opérations qui sont effectuées à chaque pas de temps lors de la résolution du solide. On voit implicitement ici que l'état stationnaire est obtenu comme limite d'un instationnaire.

Si N_n désigne le nombre de nœuds par élément (6 pour le triangle et 10 pour le tétraèdre), l'équation à résoudre sur un élément Q se présente sous la forme :

$$\sum_{l=1}^{N_n} \left[\int_Q \left(\frac{\rho C_p}{\delta t} \right)_l \varphi_l \varphi_i \varphi_j d\Omega + \int_Q (k_s)_l \varphi_l \vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_j d\Omega \right] T_i^{n+1} = \int_Q \left(\sum_{l=1}^{N_n} \left(\frac{\rho C_p}{\delta t} \right)_l \varphi_l T_i^n + \Phi_i^n \right) \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma} q_i \varphi_i d\Gamma$$

On se place à un instant t^n où l'on connaît :

- la valeur de la température T^n
- les conditions aux limites T_d sur Γ_d et q sur Γ_q

On cherche à déterminer T^{n+1} à l'instant t^{n+1}

La résolution de l'équation de diffusion se déroule de la façon suivante :

- Calcul des matrices élémentaires de type masse

$$- \int_Q \sum_{l=1}^{N_n} \left(\frac{\rho C_p}{\delta t} \right)_l \varphi_l \varphi_i \varphi_j d\Omega$$

- Calcul des matrices de type gradient

$$- \int_Q \sum_{l=1}^{N_n} (k_s)_l \varphi_l \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega$$

- Calcul des éléments du second membre

$$- \int_T \left(\sum_{l=1}^{N_n} \left(\frac{\rho C_p}{\delta t} \right)_l \varphi_l T_i^n + \Phi_i^n \right) \varphi_i d\Omega$$

$$- \int_{\Gamma} q_i \varphi_i d\Gamma$$

- Assemblage partiel des matrices élémentaires
- Prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet
- Résolution du système $A T^{n+1} = b$
- Détermination du nouveau champ T^{n+1}

Remarque : on notera que le schéma est d'ordre 1 en temps. Lors de calculs instationnaires, il convient donc d'être prudent et d'adapter le pas de temps du calcul aux phénomènes physiques simulés.

4.2.5 Solveur utilisé

Dans le présent développement, la résolution du système linéaire est effectuée à l'aide d'une méthode de gradient conjugué, avec un préconditionnement diagonal. Dans la mesure, ou l'équation à résoudre est de type diffusion, cet algorithme itératif classique convient très bien. Dans tous les cas testés, une convergence rapide a été observée.

Le principe consiste en fait en une recherche itérative du minimum d'une fonctionnelle, en se déplaçant dans les directions calculées à partir du gradient de la fonctionnelle. Ces méthodes, très répandues dans la littérature, deviennent très intéressantes d'un point de vue coût lorsque la taille des systèmes à résoudre devient conséquente.

L'algorithme implanté est le suivant :

Soit x la variable d'itération, x_o la solution initiale, A une matrice définie positive (de diagonale inverse notée D), et B un second membre. On cherche à résoudre le système suivant :

$$A x = B$$

On note r_n , g_n , d_n respectivement le résidu, le gradient de descente, et la direction de descente, à l'étape n .

Etape d'initialisation :

- $r_o = A x_o - B$
- $g_o = D r_o$
- $d_o = g_o$

Itération courante n :

- $g_n = D r_n$
- $d_n = g_n + \frac{t_{r_n} g_n}{t_{r_{n-1}} g_{n-1}} d_{n-1}$
- $z_n = A d_n$
- $\rho = \frac{t_{r_n} d_n}{t_{d_n} z_n}$
- $x_{n+1} = x_n - \rho d_n$
- $r_{n+1} = r_n - \rho z_n$

le test de convergence est alors $\|r_{n+1}\| \leq \varepsilon$

Remarque :

A aucun moment il n'est nécessaire d'inverser la matrice A , les seules opérations sont des produits de A par un vecteur (ici x_n et r_n). Il est alors tentant de ne jamais construire, (et donc ne pas stocker) la matrice A sous une forme assemblée. C'est la technique qui est mise en œuvre dans ce développement.

Il est à noter que les diverses tentatives visant à accélérer la convergence³ n'ont pas abouti aux résultats escomptés.

4.2.6 Mise en œuvre d'une méthode non-assemblée

Les auteurs ont choisi une approche générale, où les coefficients des matrices de masse et de diffusion doivent être recalculés à chaque pas de temps, puisqu'ils peuvent évoluer en

³promoteur de convergence d'Aitken, préconditionnement élément par élément. On notera par ailleurs, qu'à ce jour, très peu de temps a été investi sur ces questions.

fonction du temps et de l'espace si l'utilisateur le souhaite. L'exemple classique et souvent rencontré consiste à faire dépendre la conductivité du métal de la température locale du solide.

L'emploi d'une technique de matrice non-assemblée a été retenue, en effet des études ([8], [9]) montrent que la technique des matrices non-assemblées reste avantageuse du point de vue ressource mémoire pour le problème considéré, tout en restant simple à mettre en œuvre. Il est toutefois intéressant de noter que les récentes études effectuées sur les méthodes assemblées optimisées, induisent un besoin en place mémoire sensiblement similaire pour ce type de problème. Dans la mesure où ce développement doit également être disponible sur station de travail, ce critère (la place mémoire nécessaire) est loin d'être négligeable.

Remarque : *Pour les architectures vectorielles telle que FUJITSU les méthodes non assemblées semblent rester compétitives du point de vue temps calcul vis-à-vis des méthodes assemblées optimisées, pour le problème dont il est question dans ce rapport.*

Deuxième partie

Rayonnement

Tout corps émet continuellement de l'énergie sous forme d'un rayonnement électromagnétique sur une gamme de fréquence très étendue. Ce rayonnement thermique est en fait lié à l'énergie interne du corps. Plus l'énergie interne est élevée et plus l'agitation électronique est importante et s'accompagne d'une émission de particules ultra-relativistes. Inversement l'énergie amenée sous forme de rayonnement électromagnétique va exciter les électrons et augmenter l'énergie interne du système.

Bien que l'on soit constamment baigné dans un rayonnement électromagnétique, nous en sommes assez peu conscient car notre aptitude à percevoir l'énergie sous forme de rayonnement est faible.

Les yeux ne sont capables de réagir qu'à une mince bande ($0.4 \mu m$ à $0.7 \mu m$) et ne peuvent percevoir l'infrarouge (contrairement aux poissons rouges par exemple) ou l'ultraviolet (que certains insectes perçoivent).

La peau est en contre-partie un détecteur de rayonnement thermique mais relativement médiocre dans la mesure où un fort rayonnement thermique est nécessaire pour le percevoir.

Pourtant, ce mode de transfert peut s'avérer prépondérant. En effet, l'échange d'énergie par rayonnement entre deux points varie approximativement avec la puissance quatrième de la température contrairement aux transferts par conduction ou convection qui ne sont que d'ordre 1. Ainsi, la prise en compte du rayonnement thermique devient primordiale dès que la température s'élève. Il ne faudra cependant oublier qu'il est tout aussi important d'en tenir compte à des températures plus basses lorsque les autres modes de transfert de l'énergie sont peu représentés.

Enfin, remarquons que le transfert d'énergie par rayonnement ne nécessite aucun support matériel. Il devient, dans certaines situations, l'unique moyen d'évacuer de l'énergie (dans l'espace par exemple).

6.1 Les transferts radiatifs

Dans le cas de la conduction, le flux peut être représenté par un simple vecteur flux¹. Dans le cas du rayonnement, le flux correspond à la somme des émissions radiatives de toutes les directions de l'espace. Cela conduit à une formulation intégrale.

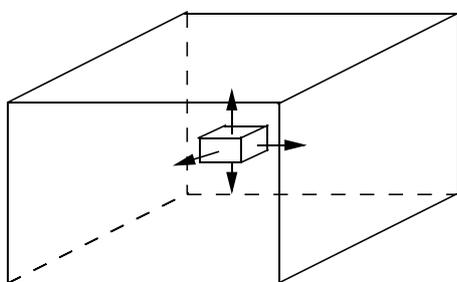
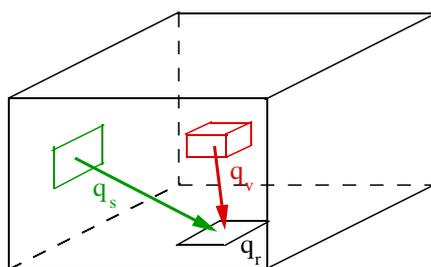


FIG. 6.1 – Notion de flux radiatif

Le flux radiatif q_r reçu par une facette est donc calculé à partir des flux émis par tous les éléments de surface et de volume l'entourant.



$$q_r = \int_s q_s \, dS + \int_v q_v \, dV$$

FIG. 6.2 – Flux radiatif reçu par une facette

La prise en compte simultanée des transferts radiatifs et des autres modes de transfert de l'énergie (conduction, convection,...) conduit donc à la résolution d'équations

¹Ce qui conduit à une notion d'équation différentielle

intégrodifférentielles, ce qui rend le problème particulièrement complexe à résoudre.

Face à ce problème délicat on adopte une approche pragmatique qui va nous conduire à faire un certain nombre d'approximations.

6.2 Définitions fondamentales

6.2.1 Emittance et luminance

L'**émittance** est le flux total émis par unité de surface de la source.

Si l'on considère un élément de surface dS qui émet une puissance $d\Phi$ dans l'ensemble des directions de l'espace, alors l'émittance M s'exprime par

$$M = \frac{d\Phi}{dS}$$

La **luminance** est exprimée par rapport à une direction donnée. Elle représente la puissance rayonnée par unité d'angle solide entourant la direction et par unité de surface projetée perpendiculairement à cette direction. On la note L .

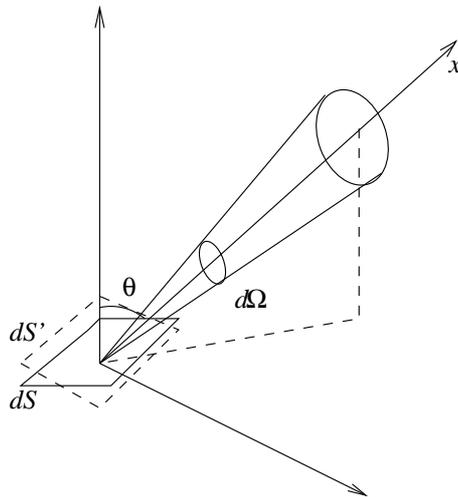


FIG. 6.3 – Définition de la luminance

Il s'en déduit que l'on peut exprimer le flux émis par un élément de surface dS dans un angle solide $d\Omega$ entourant une direction Ox de la façon suivante

$$d^2\Phi_{Ox} = L_{Ox} dS \cos \theta d\Omega$$

6.2.2 Loi de Lambert

Les sources dont la luminance est indépendante de la direction sont dites obéir à la loi de Lambert. On les appelle aussi sources à émission **diffuse** ou **isotrope**.

Nous avons vu au paragraphe précédent l'expression du flux émis par un élément de surface dS dans un angle solide $d\Omega$ entourant une direction Ox

$$d^2\Phi_{Ox} = L_{Ox} dS \cos \theta d\Omega$$

Si maintenant, on calcul le flux émis dans tout l'hémisphère, on a

$$d\Phi_{Ox} = \int_{hemisphere} L_{Ox} dS \cos \theta d\Omega$$

Or, dans le cas des corps vérifiant la loi de Lambert, le luminance est indépendante de la direction. On peut donc écrire

$$d\Phi_{Ox} = L dS \int_{hemisphere} \cos \theta d\Omega$$

Soit après intégration sur l'angle solide hémisphérique de 2π sr

$$d\Phi_{Ox} = L dS \pi$$

Soit, d'après la définition de l'émittance

$$M = \pi L$$

6.3 Les lois du rayonnement thermique

6.3.1 Le corps noir

Le rayonnement thermique des matériaux diffère d'un matériau à l'autre. A partir de considérations thermodynamiques, il a été possible d'évaluer le rayonnement thermique maximum émis par la matière à chaque température et longueur d'onde. Le corps "idéal" qui répond à ces caractéristiques a été nommé **corps noir**.

Ce corps "imaginaire" sert d'étalon et on définit le rayonnement des différents corps relativement à celui du corps noir. Ainsi, l'énergie émise par les différents corps est reliée à celle émise par le corps noir par le biais d'un coefficient : l'**émissivité** ε .

6.3.2 Loi de Planck

La loi de Planck relie l'émittance monochromatique du corps noir (M_λ^0) à la longueur d'onde λ et à sa température absolue T

$$M_\lambda^0 = \frac{2\pi h C^2 \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}$$

Dans cette expression, on a

- C : vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu où se propage le rayonnement. $C = C_0/n$ avec n indice de réfraction du milieu et $C_0 = 2.9979 \cdot 10^8$ m/s, la vitesse de la lumière dans le vide.
- h : constante de Planck. $h = 6.6255 \cdot 10^{-34}$ J.s
- k : constante de Boltzmann. $k = 1.3805 \cdot 10^{-23}$ J/K

Dans le cas où le rayonnement se propage dans un milieu d'indice de réfraction égal à 1 (le vide ou, en première approximation l'air) la loi de Planck peut s'exprimer sous une forme simplifiée

$$M_\lambda^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$$

avec $C_1 = 3.741 \cdot 10^{-16} \text{ W/m}^2$ et $C_2 = 0.014388 \text{ mK}$

La figure² ci-dessous (6.4) montre la distribution spectrale de l'émittance du corps noir en fonction de la température.

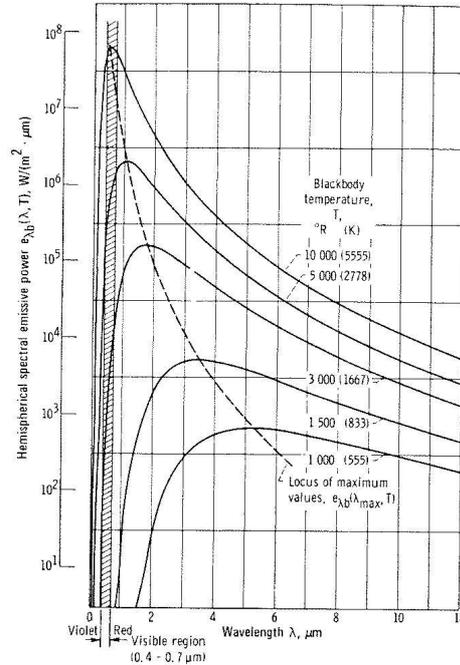


FIG. 6.4 – Emission du corps noir

6.3.3 Loi de Stephan-Boltzmann

Cette loi permet d'exprimer l'émittance totale du rayonnement du corps noir dans le vide en fonction de la température.

On intègre la formule de Planck sur l'ensemble du spectre :

$$\begin{aligned}
 M^0 &= \int_0^{\infty} M_{\lambda}^0 d\lambda \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{2\pi h C^2 \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} d\lambda \\
 &= \frac{1 C_1 T^4}{C_2^4} \int_0^{\infty} \frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} d\xi \quad \text{avec } \xi = \frac{C_2}{\lambda T} \\
 &= \frac{2 C_1 T^4}{C_2^4} \frac{\pi}{15}
 \end{aligned}$$

En posant

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{C_0^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$$

²extraite de la référence [14]

on écrit alors

$$M^0 = \sigma T^4$$

σ est appelé “constante de Stephan-Boltzmann”

6.3.4 Emission des corps réels

Comme nous l’avons vu, l’émission des corps réels est définie par rapport à l’émission du corps noir. Ainsi, les émittances totale et monochromatique d’une surface seront fournies par les relations

$$M = \varepsilon M^0 \quad \text{et} \quad M_\lambda = \varepsilon M_\lambda^0$$

Parmi les corps réels, on peut dégager des classes de corps à comportements particuliers

- **les corps gris** : l’émissivité est indépendante de la longueur d’onde
- **les corps à émission diffuse (ou isotrope)** : l’émissivité est indépendante de la direction
- **les corps gris et diffusants** : l’émissivité est indépendante de la longueur d’onde et de la direction.

6.3.5 Absorption, réflexion et transmission

Considérons un rayonnement incident $q^i_{(\lambda, \dots)}$ dans l’angle solide $d\Omega$. On note $q^r_{(\lambda, \dots)}$ le flux radiatif réfléchi, $q^a_{(\lambda, \dots)}$ le flux radiatif absorbé et $q^t_{(\lambda, \dots)}$ le flux radiatif transmis. On a alors la relation

$$q^i_{(\lambda, \dots)} = q^r_{(\lambda, \dots)} + q^a_{(\lambda, \dots)} + q^t_{(\lambda, \dots)}$$

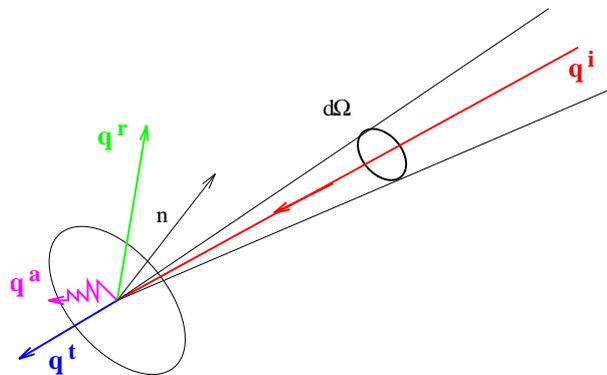


FIG. 6.5 – Flux absorbé, réfléchi et transmis

On introduit alors les grandeurs suivantes

$$\alpha = \frac{q^r_{(\lambda, \dots)}}{q^i_{(\lambda, \dots)}}$$

et

$$\rho = \frac{q^a_{(\lambda, \dots)}}{q^i_{(\lambda, \dots)}}$$

α est l'**absorptivité**, ρ la **réflectivité** et on a la relation

$$\rho + \alpha + \tau = 1$$

On remarquera que la relation précédente fait intervenir τ qui est la **transmittivité**. Dans le cas de SYRTHES (au moins pour la version 3.3) nous ne considérerons que des corps opaques sur tout le spectre thermique et nous aurons donc toujours $\tau = 0$. La relation se réduit donc à

$$\rho + \alpha = 1$$

6.3.6 Loi de Kirchhoff

La loi de Kirchhoff permet de relier les propriétés émissives et absorbantes d'un corps. Elle s'exprime de la façon suivante :

Pour chaque longueur d'onde et chaque direction de propagation du rayonnement, les émissivités et absorptivités monochromatiques directionnelles sont égales.

Cela se traduit par

$$\varepsilon_{Ox,\lambda} = \alpha_{Ox,\lambda}$$

De cette loi, il découle les deux propriétés suivantes :

- dans le cas des corps gris, la loi de Kirchhoff permet d'écrire

$$\alpha = \varepsilon$$

- dans le cas du corps noir, nous avons par définition $\varepsilon_\lambda = 1 \quad \forall \lambda$
donc

$$\alpha = \varepsilon = 1$$

6.4 Les approximations utilisées dans SYRTHES

6.4.1 Première approximation

On ne considère que les corps opaques

Pour un corps opaque, la loi de Kirchhoff indique que l'émissivité est égale à l'absorptivité.

$$\varepsilon_{Ox,\lambda} = \alpha_{Ox,\lambda}$$

On a donc la propriété suivante

$$\rho = 1 - \varepsilon$$

6.4.2 Deuxième approximation

On ne considère que les matériaux à propriétés diffuses

En conséquence, l'émissivité est indépendante de la direction. On a ainsi simplement ε_λ

Cette approximation n'est en réalité pas très restrictive dans la mesure où l'état de surface des matériaux industriels conduit généralement à un comportement diffus. Ceci est illustré par la figure suivante.

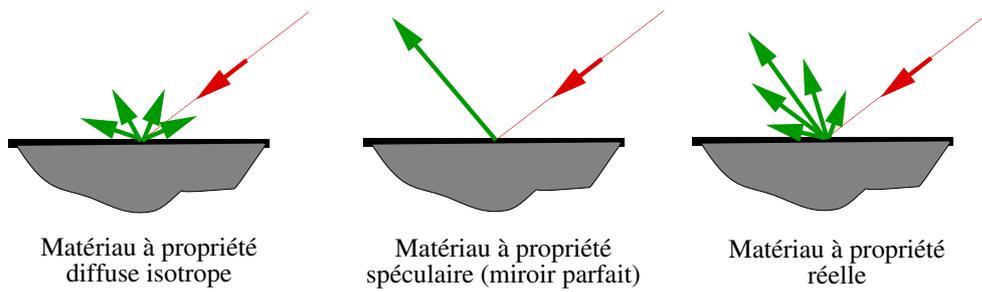


FIG. 6.6 – Comportements radiatifs des matériaux

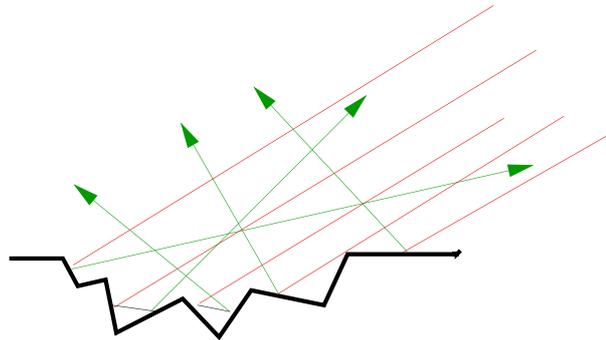


FIG. 6.7 – Matériaux réels

6.4.3 Troisième approximation

Les parois sont grises par bande

On considère donc que dans une certaine plage de fréquence, l'émissivité est indépendante de la longueur d'onde.

$$\varepsilon_{[\lambda_1, \lambda_2]} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_\lambda d\lambda$$

Remarque :

Dans certains logiciels on ne considère qu'une seule valeur de ε (intégration sur l'ensemble du spectre); on parle alors de corps gris.

Les exemples simplistes ci-dessous montrent qu'il peut être important de prendre en compte l'émissivité par bande dans certaines configurations.

On joue ici sur la forme du spectre selon la température du corps noir équivalent. Le soleil correspond à un corps noir³ à haute température dont l'essentiel de l'énergie est dans les courtes longueurs d'onde (d'après le spectre de Planck). Au contraire, un corps à faible

³En toute rigueur, le spectre solaire impactant au niveau du sol est beaucoup plus complexe. En effet, même si l'approximation du corps noir est légitime en dehors de l'atmosphère, elle devient un peu moins valide une fois la couche atmosphérique traversée. En effet, les divers composants chimiques de l'atmosphère (essentiellement les molécules de O_3 , O_2 , H_2O et CO_2) vont absorber sélectivement l'énergie radiative.

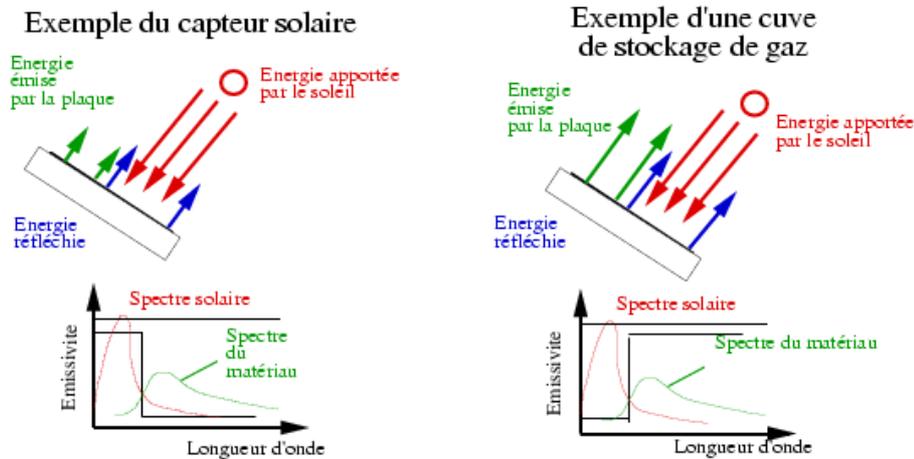


FIG. 6.8 – Prise en compte de parois grises par bande

température émet dans l’infrarouge (correspondant à une plage de longueurs d’ondes plus élevées). Dans le cas du capteur solaire, on cherche à élever la température du capteur, c’est-à-dire à absorber au maximum l’énergie solaire. Pour cette raison, il est intéressant d’utiliser un matériau possédant une valeur élevée pour ε (qui est, rappelons-le égal à α , coefficient d’absorption) dans les basses longueurs d’ondes. Inversement, on cherche à renvoyer le moins possible d’énergie sous forme infrarouge vers la voûte céleste. L’émission infrarouge étant essentiellement à grande longueur d’onde, un matériau à faible émissivité dans les grandes longueurs d’ondes diminuera l’énergie réémise et donc perdue pour le dispositif solaire.

Pour un deuxième exemple, on peut prendre le cas d’une cuve de gaz⁴ où l’on chercherait à éviter une montée trop importante en température, il peut être intéressant d’utiliser le principe opposé, c’est-à-dire absorber le moins possible d’énergie solaire. Pour cela il conviendrait d’utiliser des matériaux à faible émissivité dans les faibles longueurs d’ondes et maximiser l’énergie émise dans la plage des grandes longueurs d’ondes en utilisant un matériau à forte émissivité dans ces grandes longueurs d’onde.

Remarque :

Dans la pratique, les plages de longueurs d’onde prises en compte dans les calculs correspondent à l’intersection de toutes les plages de matériaux concernés.

⁴Dans certains dispositifs de stockage de gaz, on cherche parfois comme pour l’exemple du capteur solaire à utiliser l’énergie solaire pour maintenir la température interne à un certain niveau et par conséquent à garder une certaine pression.

6.5 Echange radiatif entre 2 surfaces

6.5.1 Flux monochromatique directionnel

Considérons deux éléments de surface dS_1 et dS_2 .

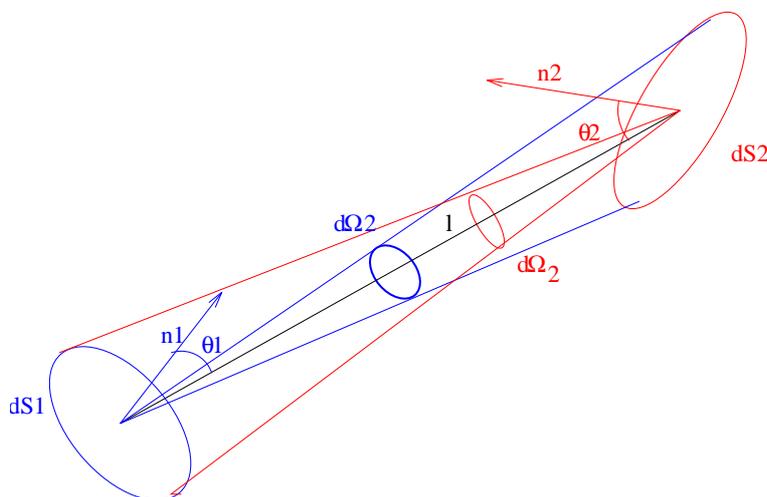


FIG. 6.9 – Flux monochromatique directionnel

Le flux monochromatique directionnel échangé entre dS_1 et dS_2 est fonction de

- la surface apparente de dS_1 dans la direction l soit $dS_1 \cos \theta_1$
- l'angle solide $d\Omega_1$ sous lequel on voit dS_2 soit $\frac{dS_2 \cos \theta_2}{l^2}$
- la largeur $d\lambda$ de l'intervalle spectral $[\lambda, \lambda + d\lambda]$

On aura donc

$$d^5\Phi_\lambda = L_{\lambda, O_x} dS_1 \cos \theta_1 d\Omega_1 d\lambda$$

Soit

$$d^5\Phi = L_{\lambda, O_x} \frac{dS_1 \cos \theta_1 dS_2 \cos \theta_2}{l^2} d\lambda$$

6.5.2 Cas de l'émission diffuse

Dans ce cas, on peut exprimer la luminance grâce à la loi de Lambert

$$L_\lambda = \frac{M_\lambda}{\pi}$$

Le flux échangé par nos deux surfaces dS_1 et dS_2 s'exprime alors

$$d^5\Phi = M_\lambda \frac{dS_1 \cos \theta_1 dS_2 \cos \theta_2}{\pi l^2} d\lambda$$

Par intégration de cette expression sur dS_1 et dS_2 on obtient le flux émis par S_1 vers S_2

$$d\Phi = M_\lambda \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dS_1 dS_2}{\pi l^2} d\lambda$$

Qui peut encore s'écrire

$$d\Phi = M_\lambda S_1 \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dS_1 dS_2}{\pi l^2} d\lambda$$

Cette dernière expression fait apparaître une grandeur purement géométrique

$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dS_1 dS_2}{\pi l^2}$$

Cette grandeur appelée **facteur de forme** (ou facteur de vue) caractérise la fraction du flux hémisphérique partant de la surface S_1 qui atteint la surface S_2

6.5.3 Propriétés des facteurs de forme

Pour deux surfaces S_i et S_j on a la relation de réciprocité

$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$$

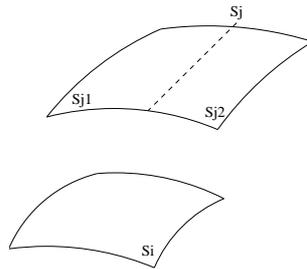


FIG. 6.10 – Facteur de forme entre 2 surfaces

Il existe également des relation d'addition

$$F_{i(j_1+j_2)} = F_{ij_1} + F_{ij_2}$$

Et, par équilibre entre le flux émis par une facette et celui reçu par l'ensemble des autres facettes d'une enceinte fermée, on a également

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$$

Traitement numérique du rayonnement

7

7.1 Calcul des facteurs de forme

Le traitement du rayonnement thermique en milieu transparent qui est implanté dans SYRTHES est basé sur une méthode utilisant les facteurs de forme. Ces facteurs de forme sont des grandeurs exclusivement géométriques qui peuvent par conséquent être calculées une seule fois en début de calcul (à condition que la géométrie n'évolue pas dans le temps, auquel cas, il faudrait les recalculer à chaque changement de géométrie).

Le calcul des facteurs de forme constitue une des difficultés de la méthode, puisqu'il être doit à la fois performant et très précis.

Les expressions analytiques n'existant que pour un nombre extrêmement restreint de configurations très simples, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques performantes pour l'évaluation des facteurs de forme.

Un certain nombre de voies ont été explorées pour calculer les facteurs de forme. On rappelle brièvement les principales.

7.1.1 Méthode de Monte-Carlo (ray tracing)

Cette technique consiste à "suivre" les photons. Chaque particule transporte une certaine quantité d'énergie. On suit la trajectoire de chacune des particules.

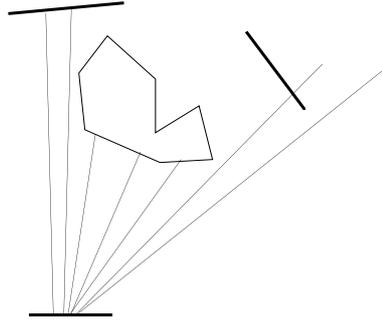


FIG. 7.1 – Méthode de Monte-Carlo

Cette méthode est bien adaptée aux géométries très complexes (encombrement très important, surfaces courbes,...). Elle est également bien adaptée (voire indispensable) au traitement des phénomènes physiques complexes comme la prise en compte d'une émissivité directionnelle, de parois spéculaires ou encore des cas où le milieu participe.

En revanche, elle est extrêmement coûteuse puisqu'il est nécessaire de lancer un nombre très important de rayons pour approcher correctement les phénomènes.

7.1.2 Intégration numérique des intégrales

Il s'agirait ici d'intégrer numériquement l'intégrale quadruple définissant le facteur de forme.

$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dS_1 dS_2}{\pi O_1 O_2^2}$$

Cette méthode s'avère assez inefficace, très coûteuse et, au bout du compte, pas très précise, même si elle a été souvent proposée dans la littérature. Elle n'a pas été retenue dans le cadre de SYRTHES.

7.1.3 La sphère de Nusselt

Cette méthode est basée sur une interprétation géométrique des facteurs de forme.

Considérons le facteur de forme entre un élément de surface dS_1 et une surface dS_2

$$F_{dS_1 S_2} = \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dS_2}{\pi l^2}$$

Ce qui, exprimé en fonction de l'angle solide $d\Omega_1$ donne

$$F_{dS_1 S_2} = \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 d\Omega_1}{\pi}$$

Par définition de l'angle solide, $d\Omega_1$ est l'aire de la surface interceptée sur la sphère de rayon unité par la conique dont le sommet est placé au centre de cette sphère : $d\Omega_1 = (dS_2)_s$. Si l'on appelle dS'_2 la projection sur le plan de base de l'hémisphère, on a $dS'_2 = (dS_2)_s \cos \theta_1$, d'où

$$\begin{aligned}
 F_{dS_1 S_2} &= \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 d\Omega_1}{\pi} \\
 &= \int_{S_2} \frac{dS'_2}{\pi} \\
 &= \frac{S'_2}{\pi}
 \end{aligned}$$

où S'_2 est l'aire de la surface projetée sur la base de l'hémisphère.

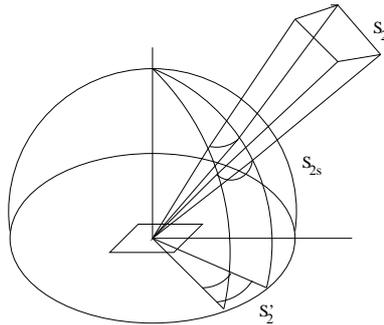


FIG. 7.2 – Sphère de Nusselt

7.1.4 L'hémicube de Cohen

Cette méthode est une adaptation aux calculateurs numériques de la sphère de Nusselt. Elle est assez populaire dans le cadre des visualisations graphiques rapides.

Le principe est le même, mais au lieu d'utiliser la projection sur une sphère (qui est difficile à calculer numériquement), on utilise la projection sur un hémicube.

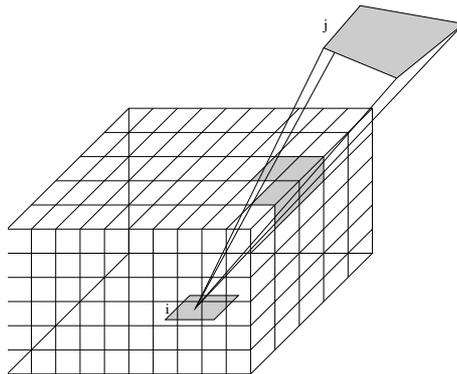


FIG. 7.3 – Hémicube de Cohen

Dans ce type de configuration, il est facile de calculer le facteur de forme de la facette i avec n'importe laquelle des facettes de l'hémicube puisque l'on se trouve dans des conditions particulières et que des formules analytiques existent.

Le principe est donc de projeter la facette j sur l'hémicube, de déterminer quelles sont

les facettes de l'hémicube qui sont occultées et de calculer le facteur de forme total par addition des facteurs de forme par rapport à chacune des facettes.

Cette technique apparaît rapide, surtout si la machine cible possède des fonctions graphiques cablées¹.

En revanche, elle souffre d'inconvénients certains :

- pour avoir une précision raisonnable, il faut utiliser un hémicube suffisamment raffiné,
- il existe des problèmes dit d'“aliasing” puisque lors de la projection, les facettes de l'hémicube sont considérées soit comme totalement occultées soit comme totalement visibles. Toutes les facettes partiellement touchées par la projection engendrent donc des erreurs.

7.1.5 La méthode des intégrales de contour

On montre qu'en utilisant le théorème de Stokes, on a l'équivalence suivante

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{1}{S_i \pi} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi l^2} dS_i dS_j \\ &= \frac{1}{2S_i \pi} \int_{C_i} \int_{C_j} \log l \, dl_i \, dl_j \end{aligned}$$

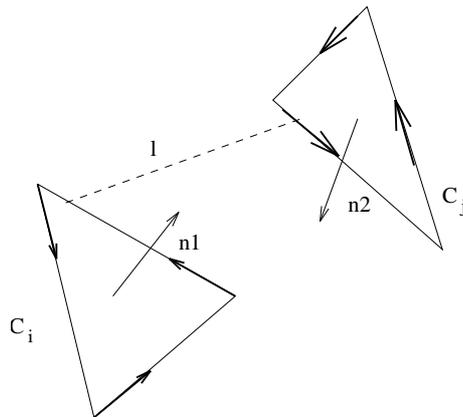


FIG. 7.4 – Intégration sur les contours

Cette approche permet de réduire l'ordre des intégration. Il faut évaluer deux intégrales de contour à la place d'une intégrale quadruple.

Si le calcul des intégrales de contour peut être encore assez coûteux, cette méthode de calcul des facteurs de forme s'avère en revanche très précise.

Cette technique a été retenue dans SYRTHES. Le calcul des intégrales de contour a été particulièrement optimisé. Les singularités des intégrales qui apparaissent dans certaines configurations sont gérées et le code est alors capable de réduire la fonction à intégrer en une fonction plus régulière et intégrable.

Le calcul du facteur de forme entre 2 facettes s'avère ainsi précis et rapide.

¹mais ce prérequis ne peut être envisagé dans le cadre d'un code de calcul.

7.2 Le traitement des surfaces cachées

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que nous étions maintenant capable de calculer efficacement le facteur entre deux facettes. Il ne faut cependant pas oublier que nous avons considéré jusqu'à présent que les facettes avaient certes une orientation et une forme quelconques mais qu'elles se voyaient entièrement, c'est-à-dire qu'aucun obstacle ne venait se glisser entre elles.

Dans la majorité des configurations industrielles ceci n'est pas vérifié et il faut encore un travail important pour lever l'"épineux" problème de la prise en compte des surfaces cachées dans une configuration donnée.

Dans SYRTHES, on utilise une technique de lancer de rayons pour détecter les surfaces cachées et calculer l'ombrage d'un obstacle.

Chaque couple de facettes est analysé et on recherche s'il existe d'autres facettes qui viennent entraver la visibilité de l'une par rapport à l'autre.

Dans le cas où les deux facettes se voient intégralement, on applique la méthode des intégrales de contour pour calculer le facteur de forme. Dans le cas contraire, il est possible de demander au code de redécouper les facettes et de travailler sur les sous-facettes. Lorsque l'on a atteint un certain niveau de raffinement, le facteur de forme est calculé puis pondéré.

La détermination des ombrages est une opération coûteuse, c'est pourquoi un algorithme efficace a été implanté dans SYRTHES. Son principe est décrit en dimension 2.

La première étape consiste à partitionner l'espace sous la forme d'un "quad-tree" qui permet le tri et le stockage optimal des facettes. Le niveau de redécoupage du quad-tree est tel que chacune de ses boîtes ne va comprendre qu'un nombre limité de facettes.

Pour chaque rayon, on détermine les boîtes qui seront traversées et seules les facettes appartenant à celles-ci seront testées. L'algorithme devient extrêmement efficace puisque le nombre de facettes testées est très restreint et quasi-indépendant de la taille globale du maillage.

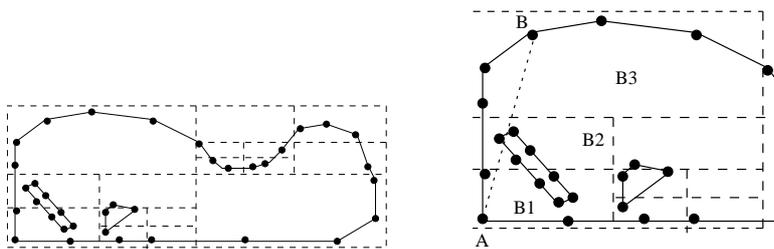


FIG. 7.5 – Détermination des ombrages

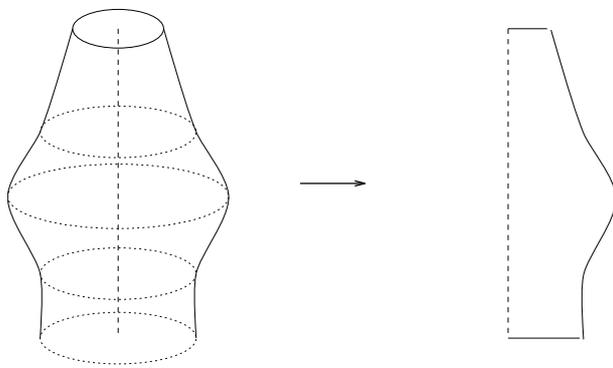
7.3 Les géométries axisymétriques

Dans certains problèmes, la géométrie présente un caractère axisymétrique. Il est alors tentant (et économique) de réduire le domaine de calcul à une géométrie bidimensionnelle

et en prenant en compte l'aspect axisymétrique du problème au niveau des équations résolues.

Si cette technique est relativement aisée à mettre en œuvre pour la résolution du problème de conduction il n'en est pas de même pour le problème radiatif (de par sa nature différentielle).

Le rayonnement thermique est par essence même un phénomène tridimensionnel. Le calcul des échanges radiatifs entre une facette donnée et le reste du domaine doit prendre en compte l'énergie issue de toutes les autres facettes. On rappelle ici que dans la formulation retenue dans SYRTHES, ce problème se ramène au calcul des facteurs de forme qui traduisent la quantité d'énergie échangée entre les diverses facettes.



La première solution qui s'impose à l'esprit consisterait à reconstituer le domaine tridimensionnel pour le calcul des facteurs de forme.

L'avantage de cette solution est qu'elle est simple à mettre en œuvre puisque l'on peut réutiliser la technique précédemment décrite. C'est pourquoi, elle a été retenue dans de nombreux codes.

Hormis le fait qu'elle soit peu élégante, elle présente l'immense inconvénient d'être très coûteuse. En effet, dans cette perspective, on ne bénéficie absolument pas du caractère axisymétrique de la pièce et on est ramené à un simple problème tridimensionnel.

Dans SYRTHES, nous avons voulu proposer une approche qui soit performante dans le cas des configurations axisymétriques et qui tire partie de cette particularité.

On conserve la configuration axisymétrique et le principe est le suivant : lorsque l'on considère le facteur de forme entre 2 facettes i et j , il faut en réalité considérer le facteur de forme entre la facette i et l'anneau décrit par j .

Ce principe est illustré par la figure 7.3

Cette efficace technique s'avère de mise en œuvre relativement aisée dans le cas des configurations où toutes les facettes se voient entre elles. Malheureusement cela ne représente qu'un nombre très réduit de cas (le cas d'un cylindre par exemple). Nous avons donc introduit dans SYRTHES des techniques de calcul de l'ombrage provoqué par les différents objets en calculant l'intersection des différents rayons (i,j) avec d'éventuelles couronnes qui seraient partiellement ocultrices.

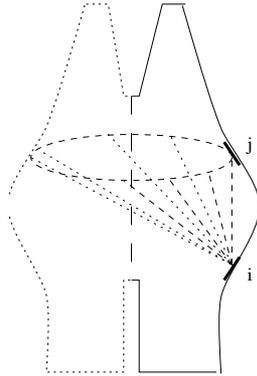


FIG. 7.6 – Géométrie axisymétrique

Ces techniques nous permettent de déterminer les différents angles de visibilité qui existent entre 2 facettes.

La figure ci-dessous montre que dans le plan d'axisymétrie les facettes i et j se voient mais que lorsque l'on considère l'anneau décrit par la facette j , i ne peut voir j que durant un angle θ . Au final, l'intégration ne doit donc pas se faire sur tout l'anneau mais uniquement dans certaines plages de θ .

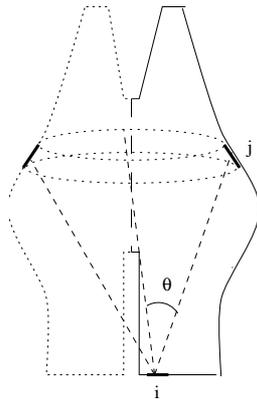


FIG. 7.7 – Calcul des facteurs de forme en axisymétrique

7.4 Les symétries et la périodicité

Le module de rayonnement de SYRTHES permet la prise en compte de symétries (jusqu'à 3 en dimension 3) et/ou de périodicités (symétries et périodicités pouvant être combinées). La seule contrainte est qu'au final, le domaine de calcul global doit être fini.

Lorsque SYRTHES rencontre des symétries ou des périodicités, le domaine complet est reconstitué pour le calcul des facteurs de forme.

En revanche, l'utilisation de symétries et/ou de périodicités permet des économies importantes de place mémoire puisque le nombre de facteurs de forme stockés est toujours $n(n+1)/2$ où n est le nombre de facettes du domaine restreint.

7.5 Le système de rayonnement

La radiosité (J) est définie comme la densité de flux total quittant une surface. Elle est donc constituée de l'émission propre du corps et du rayonnement qui est issu des autres corps et qui est réfléchi.

$$J = M + \rho E$$

Dans l'expression précédente, E désigne l'éclairement, ρ la réflectivité.

Dans une enceinte fermée, l'éclairement provient des autres surfaces. On peut donc écrire pour une facette i

$$E_i S_i = \sum_{j=1}^n S_j F_{ij} J_j$$

Soit, d'après l'expression précédente

$$\begin{aligned} J_i S_i &= M_i S_i + \rho_i E_i S_i \\ \implies J_i S_i &= M_i S_i + \rho_i \sum_{j=1}^n S_j F_{ij} J_j \\ \implies J_i S_i &= M_i S_i + \rho_i S_i \sum_{j=1}^n F_{ji} J_j \\ \implies J_i - \rho_i \sum_{j=1}^n F_{ji} J_j &= M_i \end{aligned}$$

Mis sous forme matricielle, on obtient le système à résoudre suivant

$$\begin{pmatrix} 1 - \rho_1 F_{11} & \rho_1 F_{12} & \cdots & \rho_1 F_{1n} \\ \rho_2 F_{21} & 1 - \rho_2 F_{22} & \cdots & \rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_n F_{n1} & \rho_n F_{n2} & \cdots & 1 - \rho_n F_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}$$

La diagonale de la matrice est toujours dominante et ses termes sont toujours inférieurs à 1. Ce système est résolu par une méthode de résidu conjugué préconditionné qui converge toujours rapidement dans ces conditions.

7.5.1 Cas des corps gris

Dans le cas des corps gris, l'émittance se résume à $M = \varepsilon \sigma T^4$ et on résout alors simplement le système précédent.

7.5.2 Cas des corps gris par bande

En revanche, si le corps est gris par bande, on intègre l'émittance sur chacune des bandes et le système doit être résolu sur chacune des bandes. Le coût de la résolution est donc proportionnel au nombre de bandes spectrales définies. Pour une bande $[\lambda_1, \lambda_2]$ l'émittance

est calculées à partir des formules de Wiebelt :

$$M_{\lambda_1\lambda_2} = \sigma\varepsilon_{\lambda_1\lambda_2} T^4 (W_2 - W_1)$$

avec en posant $v_i = 1.4388E - 2/\lambda_i$

$$W_i = 0.153989717364 \sum_{m=1}^5 \frac{m^3 v_i^3 + 3m^2 v_i^2 + 6m v_i + 6}{m^4} e^{-mv_i} \quad \text{si } v_i > 2$$

$$W_i = 1 - .153989717364 v_i^3 (.333333343267 - .125 v_i + .0166666675359 v_i^2 - .198412701138 \cdot 10^{-3} v_i^4 + .367430925508 \cdot 10^{-5} v_i^6 - .751563220547 \cdot 10^{-7} v_i^8) \quad \text{si } v_i < 2$$

7.6 Le couplage avec la conduction

7.6.1 Les maillages

SYRTHES utilise des maillages différents pour le traitement de la conduction et du rayonnement. Ces maillages sont complètement indépendants et ne nécessitent pas d'être coïncidents à l'interface.

Cette approche présente de nombreux avantages :

- le degré de finesse des maillages pour la conduction et le rayonnement est indépendant,
- la prise en compte du rayonnement étant gourmande en place mémoire (il est nécessaire de stocker $n(n+1)/2$ facteurs de forme), l'indépendance des maillages permet de réduire le nombre des facettes utilisées pour le rayonnement (donc la taille du problème) tout en ayant un maillage adapté aux phénomènes physiques que l'on souhaite capter.

En début de calcul SYRTHES établit une table d'interpolation pour le transfert des informations d'un maillage sur l'autre.

Pour chaque noeud du maillage de conduction, on recherche le point appartenant à la surface de rayonnement le plus proche. C'est le flux radiatif associé à cette facette qui transféré sur le maillage solide.

Inversement, pour chaque facette du maillage de rayonnement (ou plus exactement son barycentre), on recherche le point de la surface du maillage solide le plus proche. La température solide est ensuite interpolée en ce point et transférée sur la facette de rayonnement.

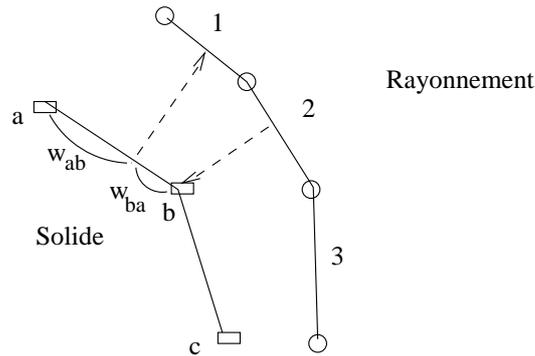
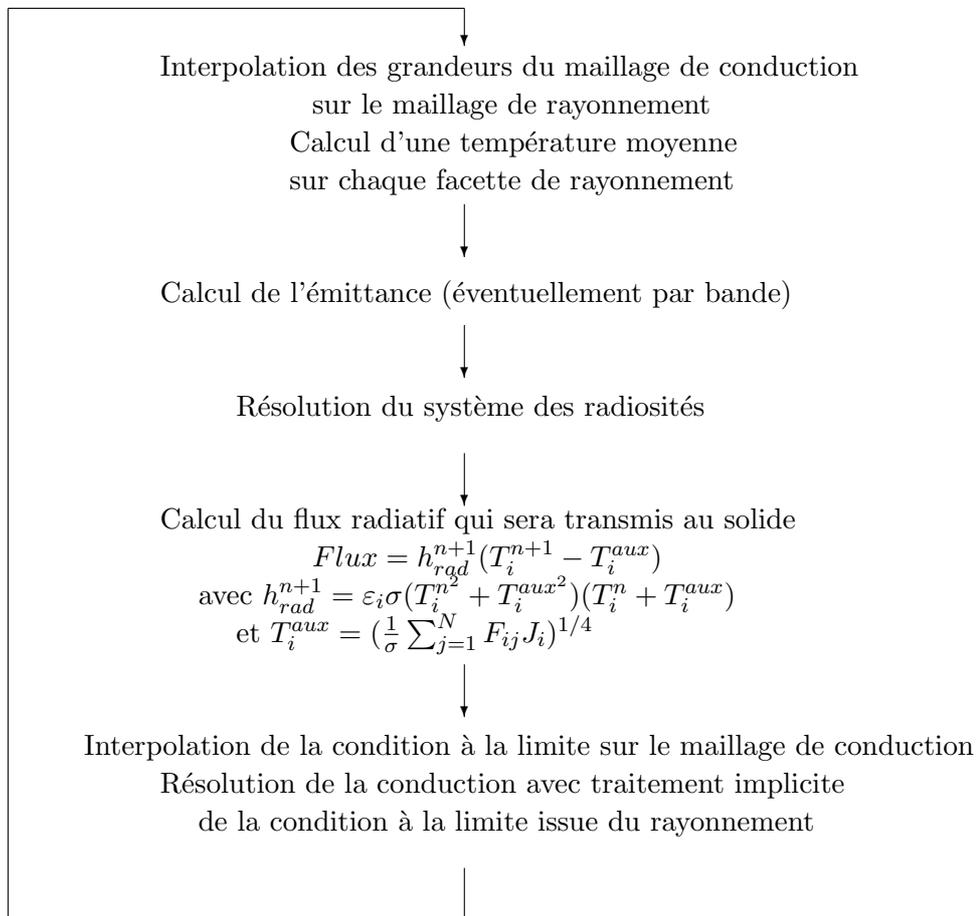


FIG. 7.8 – Couplage solide/rayonnement

7.6.2 Algorithme pour le couplage de la conduction et du rayonnement



Ces formules s'étendent facilement aux problèmes multibandes en écrivant que le flux total correspond à la somme des flux sur chaque bande.

7.7 Le couplage fluide/conduction solide/rayonnement

En ce qui concerne le couplage fluide/solide, le principe est similaire à celui utilisé dans le cas du couplage solide/rayonnement.

On utilise des maillages distincts sans aucune nécessité d'être coïncidents.

Pour chaque noeud du maillage de conduction, on recherche le point appartenant à la surface fluide le plus proche, et inversement, pour chaque noeud du maillage fluide, on recherche le point de la surface du maillage solide le plus proche. La température solide ou le couple température fluide/coefficient d'échange sont ensuite interpolés en ce point et transférées. Ainsi, sur la figure 7.7 la température fluide au nœud b est calculée à partir des températures solides en 2 et 3 et des coefficients de pondération w_{23} et w_{32} . Inversement, on transfère sur le nœud solide 1 la température et le coefficient d'échange fluide en fonction des valeurs en a et b .

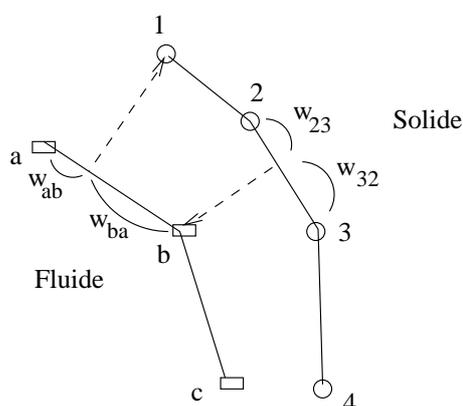


FIG. 7.9 – Couplage fluide/solide

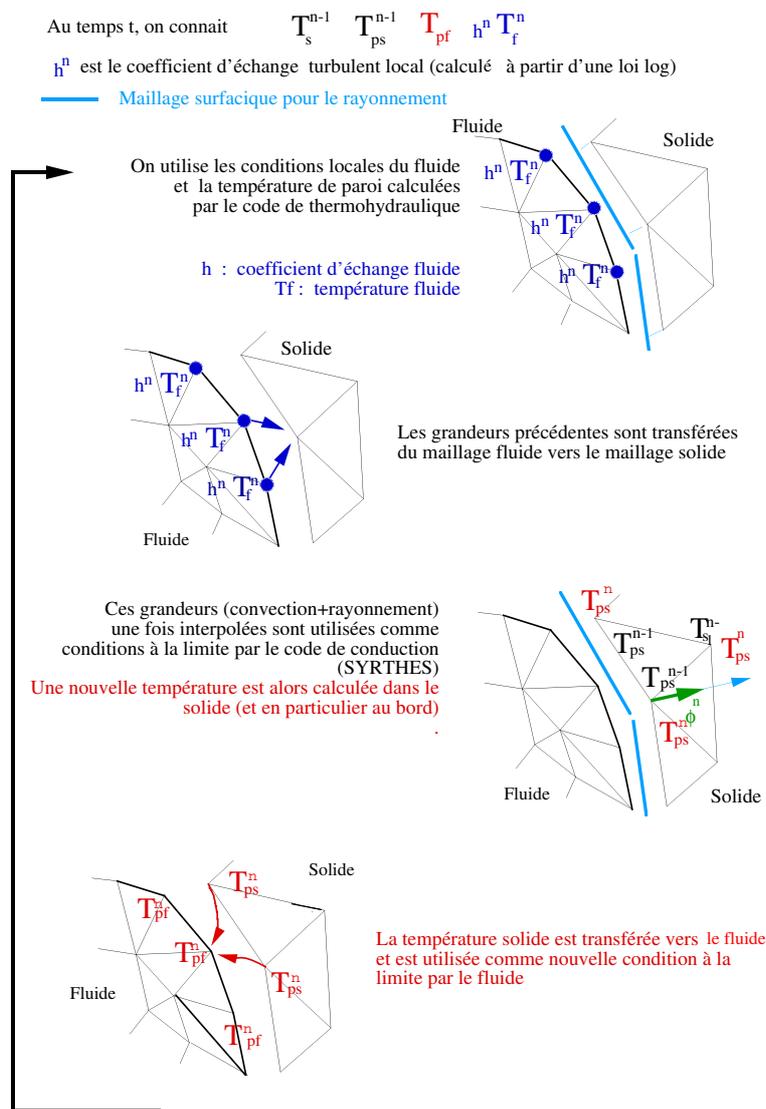


FIG. 7.10 – Couplage thermique fluide/solide/rayonnement

Ce document présente les aspects théoriques relatifs à la version 3.4 de SYRTHES. Les méthodes numériques mises en œuvre (discrétisation, solveurs,...) sont détaillées. On montre qu'elles conduisent à un outil numérique performant en terme de ressources informatiques nécessaires (aussi bien du point de vue de la mémoire que du temps calcul).

Le traitement des échanges radiatifs en milieu confiné (limité aux milieux transparents dans SYRTHES 3.4) a été particulièrement soigné. La méthode retenue (radiosité) est rapide, précise et non diffusive. Elle a été développée aussi bien en 3D, 2D cartésien, qu'en 2D axisymétrique¹.

En complément de ce manuel théorique, les utilisateurs pourront se procurer le manuel utilisateur [15] et éventuellement les manuels de validations élémentaires [2],[3] du code.

A titre d'information, on pourra également consulter quelques articles publiés par les auteurs, qui présentent certaines fonctionnalités du code SYRTHES, et des applications industrielles (voir par exemple [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [24] [25]).

¹Il est à noter que le vrai 2D axisymétrique est très peu rencontré dans la littérature.

Conduction

| | | |
|---------------|---|----------|
| α | Coefficient de dilatation linéique | |
| C_p | Capacité calorifique | J/kgK |
| E_t | Energie totale | J |
| e | Energie interne | J |
| Γ | Frontière | |
| h | Enthalpie | J/kg |
| J | Constante d'équivalence travail/chaueur | |
| k_s, K_{ij} | Conductivité thermique | W/mK |
| n | Normale | |
| Ω | Volume | m^3 |
| Φ | Flux volumique | W/m^3 |
| φ | Fonction de base | W/m^3 |
| p | Pression | Pa |
| Q | Chaleur | J |
| q | Flux de chaleur | W/m^2 |
| ρ | Masse volumique | kg/m^3 |
| dS | Elément de surface | m^2 |
| T | Température | K |
| t | Temps | s |
| \vec{u} | Vitesse | m/s |
| W | Travail | J |

Rayonnement

| | | |
|---------------|---|-------------|
| α | Absorptivité | |
| C | Vitesse des ondes électromagnétiques dans un milieu | m/s |
| C_0 | Vitesse de la lumière dans le vide | m/s |
| ε | Emissivité | |
| E | Eclairement | W/m^2 |
| F_{ij} | Facteur de forme | |
| h | Constante de Plank | |
| J | Radiosité | W/m^2 |
| k | Constante de Boltzmann | |
| l | Longueur | m |
| L | Luminance | W/m^2 |
| λ | Longueur d'onde | |
| M | Emittance | W/m^2 |
| Φ | Flux radiatif | W/m^2 |
| ρ | Réfectivité | |
| σ | Constante de Stefan-Boltzmann | $W/m^2 K^4$ |
| S, dS | Surface, élément de surface | m^2 |
| τ | Transmittivité | |

Indices, exposants

| | |
|-----------|--------------------------|
| Ox | Grandeur directionnelle |
| λ | Grandeur monochromatique |

Bibliographie

- [1] Péniguel C, Rupp I,. *SYRTHES - Présentation générale d'un développement de couplage thermique entre un fluide et un solide*. Rapport EDF/DER HE-41/92/05.
- [2] Rupp I, Péniguel C. *SYRTHES - Conduction et rayonnement thermique - Manuel de validation de la version 3.1*. Rapport EDF/DER HE-41/99/008/A.
- [3] Rupp I, Péniguel C. *SYRTHES - Conduction et rayonnement thermique - Manuel de validation de la version 3.3*. Rapport EDF R&D 2002.
- [4] Zienkiewicz OC. *The finite element method*. Mc Graw Hill.
- [5] Brezis H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson 1983.
- [6] Ciarlet PG. *The Finite Element Method for Elliptic Problems (vol 4)*. North Holland Publishing Company 1979.
- [7] Raviart PA, Thomas JM. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson 1983.
- [8] Hervouet J.M. *Remarques sur les méthodes numériques du code TELEMAC*. Rapport EDF/DER HE-43/89/30.
- [9] Caruso A., Mechtoua N. *Résolution par la méthode des éléments finis des équations de Navier-Stokes à masse volumique variable en régime turbulent*. Rapport EDF-DER HE-44/92/03.
- [10] *Maple V - Users manual*. Springer-Verlag.
- [11] Grégoire J.P. *Recueil de matrices élémentaires pour l'élément fini de forme triangulaire ou tétraédrique*. Rapport EDF/DER HI-A7/7561.
- [12] Grégoire J.P. *Projet N3S de mécanique des fluides. Programme PREFN3S de calcul automatique de matrices élémentaires suivi d'un recueil complet de celles-ci*. Rapport EDF/DER HI-A7/7876.
- [13] Métivet B, Thomas B, Fullsack Ph. *Projet N3S de mécanique des fluides. Présentation de l'algorithme de gradient projeté pour la prise en compte des conditions de paroi associées aux équations de Navier-Stokes*. Rapport EDF/DER HI-72/6069.
- [14] Siegel R, Howell JR. *Thermal Radiation Problem*. Second edition, Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- [15] Rupp I, Péniguel C. *SYRTHES - Conduction et rayonnement thermique - Manuel utilisateur et tutorial de la version 3.3*. Rapport EDF-R&D HI-83/01/038/A.
- [16] Péniguel C. Heat transfer simulation for industrial applications : Needs, limitations, expectations. pages 102–114. Int Journal of Heat and Fluid Flow (vol 19), Elsevier, 1998.

- [17] Péniguel C, Rupp I. A numerical method for thermally coupled fluid and solid problems. pages 1027–1039, U.K. Swansea, 1993. Numerical Methods in Thermal Problems.
- [18] Péniguel C, Rupp I. A numerical approach for thermally coupled fluid and solid problems in complex geometries. pages 27–34, U.K. Southampton, 1994. 3rd Int Conference Heat Transfer.
- [19] Péniguel C, Rupp I. A finite element approach to simulate general conduction problems. pages 555–562, U.K. Southampton, 1994. 3rd Int Conference Heat Transfer.
- [20] Péniguel C, Rupp I. A numerical approach of coupled heat conduction and enclosure radiation problems. pages 787–796, Italy - Venezia, 1995. 8th FEMIF.
- [21] Péniguel C, Rupp I. A numerical approach of thermal problems coupling fluid solid and radiation in complex geometries. pages 797–806, Italy - Venezia, 1995. 8th FEMIF.
- [22] Péniguel C, Rupp I. Coupling heat conduction and radiation in complex 2D and 3D geometries. U.K. Swansea, 1997. Numerical Methods in Thermal Problems.
- [23] Rupp I, Péniguel C. Coupling heat conduction and radiation and convection phenomena in complex 2D and 3D geometries. U.K. Swansea, 1997. Numerical Methods in Thermal Problems.
- [24] Péniguel C, Rupp I. Coupling conduction radiation and convection using PVM. St Venant Symp. Paris, 1997.
- [25] Rupp I, Péniguel C. Coupling heat conduction, radiation and convection in complex geometries. Int Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow - Vol 9, 1999.